


FONDO PIZZOFALCONE

RECHERCHES

SUR LE

MOUVEMENT DES PROJECTILES

DANS L'AIR,



EN AYANT ÉGARD

A LEUR FIGURE ET LEUR ROTATION,

ET A L'INFLUENCE DU MOUVEMENT DIURNE DE LA TERRE;

PAR S.-D. POISSON,

Pair de France; Membre de l'Institut, du Bureau des Longitudes et de l'Université de France; des Sociétés royales de Londres, d'Édimbourg et de Gottingue; des Académies de Berlin, de Stockholm, de Saint-Pétersbourg, d'Upsal, de Boston, de Turin, de Naples, etc.; des Sociétés italienne, Astronomique de Londres, etc.



PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC., ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1839

TABLE DES MATIÈRES.

MÉMOIRE *sur le mouvement des Projectiles dans l'air, en ayant égard à la rotation de la Terre.* Page 1.

PRÉAMBULE. — Imperfection de la théorie actuelle de la résistance des fluides. — Comment cette question devrait être considérée. — On énumère les résultats principaux auxquels on est parvenu dans ce Mémoire. — La rotation de la Terre peut influer notablement sur le tir de la bombe à grande portée. Pages 1 — 10.

Équations différentielles du mouvement absolu du projectile. N° 1.

Équations différentielles de son mouvement apparent rapportées à des axes des coordonnées fixes à la surface du globe. N° 2.

Simplification de ces dernières équations. N°s 3 et 4.

Extension de ces mêmes équations au mouvement sur une courbe donnée et fixée à la Terre. — Conséquences qui s'en déduisent relativement au mouvement du pendule dans différents azimuts, et à la figure permanente d'un fluide tournant dans un vase. N° 5.

Cas du mouvement à très peu près vertical et de haut en bas. — Intégration sous forme finie des équations différentielles qui s'y rapportent. — La déviation des corps qui tombent d'une grande hauteur a toujours lieu à l'*est*; elle est insensible dans le sens du méridien. — Comparaison du résultat du calcul à celui de l'observation. N°s 6 et 7.

Cas du mouvement d'un corps lancé verticalement et de bas en haut. — Intégration sous forme finie des équations différentielles qui se rapportent à l'ascension et à la chute successives du mobile. — Applications numériques des formules. — Influence extrêmement grande de la résistance de l'air sur les résultats. N°s 8, 9, 10.

Application des équations différentielles du n° 2 à un mobile lancé sous un angle et dans un plan vertical quelconques, et qui s'écarte très peu du plan de projection pendant toute la durée du mouvement. N° 11.

Cas du tir sous un très petit angle. — Influence de la rotation de la Terre, dans les différents azimuts, sur la longueur de la portée ou sur l'angle du tir. — La déviation horizontale a lieu pour tous les azimuts, à la droite du soldat. — Application numérique au tir à la cible du fusil d'infanterie. N°s 12, 13, 14.

Formules ordinaires de la balistique. N° 15.

Accroissements dus à la rotation de la Terre, des trois coordonnées du projectile, des composantes de sa vitesse, de la portée, de l'angle de chute, du temps du trajet, sous un angle de tir et dans un azimut quelconques. N°s 16 et 17.

Limites des intégrales doubles que renferment les expressions de ces accroissements. — Application numérique au tir de la bombe. N°s 18 et 19.

Formules qui se déduisent des équations différentielles du n° 11, et qui se rapportent au mouvement dans le vide. N° 20.

MÉMOIRE *sur le mouvement des Projectiles dans l'air, en ayant égard à leur rotation.* Page 69.

PRÉAMBULE. — Exposé succinct des travaux des géomètres sur le mouvement des corps solides en général. — Causes principales, au nombre de trois, auxquelles on a attribué les déviations observées dans les mouvements des projectiles de l'artillerie, mais dont les effets ne pouvaient être déterminés sans le secours de l'analyse. — L'examen successif de ces trois causes distinctes sera l'objet de ce mémoire. Pages 69 — 81.

§. Ier. *Équations différentielles du double mouvement de translation et de rotation du projectile.* Page 81.

On rappelle les équations connues de ces deux mouvements simultanés, dans le cas général où le mobile est soumis à des forces quelconques. Nos 1, 2 et 3.

Dans la question du mouvement des projectiles, ces forces sont la pesanteur, la résistance proprement dite du fluide, son frottement contre la surface du mobile. — Exemple particulier des deux dernières forces, l'une tangente, l'autre normale, en chaque point de cette surface. No 4.

Intégrales doubles qui expriment, pour toute la surface d'un projectile de forme quelconque, les composantes et les moments de la résistance et du frottement, provenant des mouvements de rotation et de translation aussi quelconques de ce corps. Nos 5 et 6.

Expressions diverses des composantes de la vitesse due au double mouvement d'un point quelconque de la surface du projectile. Nos 7 et 8.

§. II. *Influence du frottement de l'air sur les mouvements de translation et de rotation du projectile.* Page 100.

Dans ce paragraphe, on suppose le projectile de forme sphérique, ce qui rend la vitesse de chaque point de la surface suivant la normale, indépendante de la rotation. No 9.

Calcul des intégrales doubles contenues dans les équations différentielles du mouvement de rotation. No 10.

Calcul des intégrales doubles contenues dans les équations différentielles du mouvement de translation. — Usage des permutations *tournantes* pour parvenir plus promptement au résultat. Nos 11, 12 et 13.

Les équations différentielles du mouvement de rotation d'un projectile sphérique, sont indépendantes de son mouvement de translation. — Intégration de ces équations sous forme finie. — Lois du mouvement de rotation. Nos 14 et 15.

Le mouvement de translation dépend de la rotation du projectile. — Ses équations différentielles ne sont point intégrables sous forme finie. No 15 *bis* (*).

Cas du tir à peu près horizontal ou sous un petit angle. — Influence du frottement sur les déviations du mobile en dehors du plan de projection et dans ce plan. — Équations de la trajectoire à double courbure, et calcul de ces déviations et de la portée, lorsque la durée du trajet est un très petit intervalle de temps, comme cela a lieu à l'égard des projectiles de l'artillerie. Nos 16 et 17.

Cas du mouvement à peu près vertical, soit pendant que le mobile s'élève, soit pendant la durée de sa chute. Nos 18 et 19.

§. III. *Influence de la non-sphéricité du projectile, sur son double mouvement de rotation et de translation.* Page 120.

(*) Par erreur on a employé une seconde fois le no 15.

On fait abstraction du frottement, dont on a examiné les effets dans le paragraphe précédent, et pour simplifier les équations différentielles du double mouvement, l'on suppose le projectile à très peu près sphérique et homogène. — Modifications qu'elles éprouvent dans cette hypothèse, qui convient aux projectiles de l'artillerie. Nos 20, 21 et 22.
Afin d'examiner isolément dans ce paragraphe, l'influence de la non-sphéricité du projectile, on le suppose tout-à-fait homogène, et on prend pour sa forme, celle d'un ellipsoïde qui s'écarte très peu de la sphère. — Calcul des intégrales renfermées dans les équations du mouvement de rotation, et dans celles du mouvement de translation. Nos 23 et 24.
Équations différentielles de ces deux mouvements. — Nécessité de les simplifier encore davantage, par des hypothèses relatives à la direction du mouvement de translation et à la direction de l'axe de rotation. No 25.
On suppose d'abord que la trajectoire s'écarte très peu d'une droite horizontale, pendant toute la durée du mouvement. — Expressions des trois coordonnées du centre de gravité du mobile, en fonctions du temps et des trois angles qui déterminent à chaque instant la position de ce corps autour de ce centre. No 26.
On suppose aussi que l'axe *instantané* de rotation s'écarte constamment très peu de l'un des trois axes principaux du mobile. — Application au tir de la carabine rayée en hélices. — Détermination de la vitesse initiale de rotation de la balle, d'après celle de projection et l'inclinaison des hélices. — Le mouvement de rotation dépend alors de quatre équations différentielles du premier ordre, linéaires et à coefficients variables. Nos 27 et 28.
Lorsque les hélices ont imprimé à la balle un mouvement très rapide autour de son axe de figure, ce système d'équations simultanées s'intègre sous forme finie par une méthode particulière. — Lois du mouvement de rotation qui se déduisent de ces intégrales. Nos 29 et 30.
Expressions des trois coordonnées du centre de gravité de la balle en fonctions du temps, dans la même hypothèse d'une très grande vitesse de rotation. No 31.
Équations qui déterminent, pour une longueur donnée de la portée, la durée du trajet, l'angle du tir, la déviation horizontale. No 32.
Valeurs de cet angle et de cette déviation, relatives à la moyenne d'une longue suite d'épreuves. No 33.
Réduction en séries convergentes des intégrales comprises dans les valeurs précédentes. No 34.
Moyen de déterminer par l'observation ces mêmes valeurs moyennes, et de comparer sur ce point les résultats du calcul à ceux de l'expérience. No 35.
Application numérique à une série d'épreuves particulières; accord remarquable entre l'angle du tir calculé et l'angle conclu de l'ensemble des observations. No 36.
Indication succincte du cas où les hélices de la carabine seraient parallèles, et la vitesse initiale de rotation de la balle à peu près nulle. No 37.

Suite du Mémoire précédent.

Préambule. — On supposera que le projectile soit une sphère non-homogène dont le centre de figure et le centre de gravité s'écartent peu l'un de l'autre. — Remarque relative à la tendance du centre de gravité dans le tir de la bombe. Pages 177 — 179.
§. IV. *Influence de la non-homogénéité du projectile sur son double mouvement de rotation et de translation.* Page 179.

Application des formules relatives à ce double mouvement, au cas du projectile que l'on veut considérer. N° 38.
Équations différentielles de son mouvement de rotation. N° 39.
Équations différentielles de son mouvement de translation. N° 40.
Application de ces deux systèmes d'équations au cas de la bombe tournant autour d'un axe constamment perpendiculaire à son plan de projection. — Formules qui expriment, par les *quadratures*, les deux coordonnées du centre de gravité, le temps qu'il emploie pour parvenir en chaque point de sa trajectoire, sa vitesse en ce point. — Application numérique qui montre le peu d'influence de la rotation du projectile sur la trajectoire. N° 41, 42, 43.
Lois de son mouvement de rotation. — Cas où la rotation initiale est nulle. N° 44.
Autre cas du mouvement de la bombe dans lequel son centre de gravité peut sortir du plan de projection. — Calcul de la déviation horizontale, très petite et négligeable en général, dans la pratique. N° 45 et 46.
Application des équations différentielles des n° 39 et 40, au tir de la carabine rayée en hélices. N° 47.
Intégration sous forme finie des équations du mouvement de rotation, dans le cas où la balle tourne très rapidement autour de la droite qui contient son centre de gravité et son centre de figure. N° 48.
Expressions des trois coordonnées de son centre de gravité relatives au même cas. — La comparaison de ces formules à celles du n° 31, montre que généralement la non-homogénéité du projectile influe beaucoup moins sur son mouvement de translation que sa non-sphéricité. N° 49.
Second exemple du tir de la carabine, dans lequel la balle tourne autour d'un rayon à peu près perpendiculaire à la ligne des deux centres. N° 50.
Les trois équations différentielles du mouvement de rotation d'un corps solide de forme quelconque, indépendantes des forces qui le sollicitent, sont intégrables sous forme finie, toutes les fois que le corps tourne uniformément autour d'un axe invariable dans son intérieur. — Théorème qui en résulte, relativement à la décomposition de ce mouvement simple en trois mouvements d'oscillations, et réciproquement à la résolution de ces trois mouvements oscillatoires en un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe. N° 51.
On détermine autant qu'il est possible, dans le cas du n° 50, le double mouvement de rotation et de translation de la balle. N° 52 et 53.

Addition au §. III du Mémoire précédent.

On développe des intégrales contenues dans les formules du n° 31, en séries qui pourront être convergentes dans des cas où les séries du n° 34 ne le seraient pas. — Expressions des coordonnées du centre de gravité de la balle qui résultent de ce nouveau développement, et qui se rapportent à la position moyenne de ce centre dans une très longue série d'épreuves. — Considérations relatives aux causes constantes qui peuvent influer sur les résultats moyens, quel que soit le nombre des épreuves. Pages 220 — 226.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

MÉMOIRE

SUR LE MOUVEMENT



DES PROJECTILES DANS L'AIR,

En ayant égard à la rotation de la Terre.

LU A L'ACADÉMIE DES SCIENCES, LE 14 NOVEMBRE 1837.

Dans ce Mémoire, le projectile sera considéré comme un point matériel et isolé, c'est-à-dire comme un corps dont la masse est réunie au centre de gravité; et il s'agira d'apprécier l'influence de la rotation de la Terre sur son mouvement. J'en présenterai incessamment un autre à l'Académie, où l'on aura égard à la forme et aux dimensions du mobile, et dont l'objet sera de déterminer, principalement en ce qui concerne les projectiles de l'artillerie, l'influence que leur propre rotation peut produire sur leur mouvement de translation.

La théorie de la résistance que les fluides en général, et l'air en particulier, opposent au mouvement des corps qui les traversent, n'est, jusqu'à présent, qu'une ébauche très imparfaite. On y assimile cette force à une suite continuelle de chocs du mobile contre les particules

du fluide, qui disparaissent et s'anéantissent pour ainsi dire, à mesure qu'elles ont été atteintes par ce corps, et qu'elles lui ont enlevé de petites quantités de mouvement, proportionnelles à leurs masses et à sa vitesse. Newton, à qui l'on doit cet essai de théorie, en avait conclu qu'abstraction faite de la rotation du mobile, et pour une sphère, par exemple, la résistance de l'air est égale au poids d'un cylindre de ce fluide, ayant pour base et pour hauteur, le grand cercle de la sphère et la hauteur due à sa vitesse. Mais les expériences qu'il fit sur la chute des corps dans l'air, lui montrèrent bientôt l'inexactitude de ce résultat, et l'ont conduit à réduire de moitié, cette mesure de la résistance; on a jugé, depuis, cette réduction trop forte; et Borda a conclu de ses propres observations, que la mesure de la résistance devait être seulement abaissée aux trois cinquièmes de sa valeur théorique. D'après la théorie de Newton, modifiée par l'expérience, la force retardatrice, rapportée à l'unité de masse, d'une sphère qui se meut dans l'air, a pour expression le carré de la vitesse de ce corps, divisé par son diamètre et par le rapport de sa densité à celle du fluide, et multiplié par un coefficient numérique sur lequel tous les auteurs de Balistique ne sont pas d'accord. Suivant Lombard (*), et en s'appuyant sur les expériences de Borda, ce coefficient serait égal à environ neuf quarantièmes. Mais la loi véritable de la résistance en fonction de la vitesse, est beaucoup plus compliquée : dans les mouvements qui sont, ou très rapides, ou très lents, elle paraît s'écarter notablement de la proportionnalité au carré de la vitesse; elle croît suivant un plus grand rapport, dans le cas des très grandes vitesses; et au contraire, elle est sensiblement proportionnelle à la simple vitesse, quand il s'agit de petits mouvements, comme les très petites vibrations du pendule à secondes (**).

Pour déterminer directement et sans aucune hypothèse, la loi de la résistance qu'un corps éprouve en se mouvant dans un fluide, il

(*) *Traité du Mouvement des Projectiles*, page 99.
(**) *Additions à la Connaissance des Tems*, année 1834, page 18.

faudrait considérer à la fois ce mouvement et celui que le mobile communique au fluide : par l'effet de ce double mouvement, le fluide exerce à chaque instant une certaine pression, en chaque point du mobile et normale à sa surface; cette pression, différente de celle qui a lieu dans l'état de repos, produit la résistance proprement dite que le mobile éprouve, et à laquelle il faudrait encore joindre la force tangente à la surface, provenant du frottement de ce corps contre la couche fluide qui le touche. C'est ce que j'ai pu faire, en effet, dans mon Mémoire sur les *Mouvements simultanés du pendule et de l'air environnant* (*), et ce qui m'a conduit à déduire de la théorie, la correction nouvelle que M. Bessel a fait subir, d'après l'expérience, à la longueur du pendule à secondes. J'essaierai, par la suite, d'étendre mon analyse au cas du mouvement progressif des projectiles dans l'air, et de déterminer, s'il m'est possible, la pression que le fluide, qu'ils déplacent en le comprimant d'un côté et le dilatant de l'autre, exerce sur leur surface, ou la résistance qu'ils éprouvent, envisagée sous le point de vue que je viens d'indiquer. Je n'ai pas besoin de dire combien la connaissance de cette loi, exacte et générale, serait importante dans beaucoup de questions, et, par exemple, dans le problème de la Balistique. Mais pour l'objet que je me suis proposé dans ce Mémoire, j'ai pu admettre comme étant suffisamment approchée, la loi ordinaire de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

C'est aussi Newton qui a donné le premier exemple de la détermination du mouvement d'un corps pesant dans un milieu résistant. Quand le mouvement est vertical, il a résolu le problème, en supposant la résistance proportionnelle, soit à la vitesse, soit à son carré; mais lorsque le projectile est lancé dans l'air suivant une direction quelconque, il s'est borné à considérer le cas de cette force proportionnelle à la simple vitesse, en observant toutefois que ce cas n'était pas celui de la nature. Les deux équations que Newton a dû intégrer

---

(*) Tome XI des *Mémoires de l'Académie des Sciences.*

pour déterminer les composantes horizontale et verticale de la vitesse à un instant quelconque, sont linéaires, du premier ordre et à coefficients constants; et les deux inconnues y sont séparées, de sorte que ces deux équations se résolvent indépendamment l'une de l'autre, et que leur solution ne suppose réellement qu'une simple intégration immédiate. Il n'en est plus de même dans le cas de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse: les deux inconnues entrent à la fois dans chacune des équations du mouvement, qui ne sont plus linéaires; et ce n'est que par une combinaison particulière, que l'on parvient à y séparer les variables et à les ramener aux quadratures, ce que l'on regarde comme la solution complète du problème. Elle est due à Jean Bernouilli, qui l'a donnée dans les actes de Leipzig de 1719, plus de trente ans après la solution de Newton, et à une époque où le calcul intégral avait déjà fait de grands progrès. Cependant, Euler, au commencement de son mémoire sur cette matière (*), exprime sa surprise de voir que Newton se soit arrêté au cas de la résistance proportionnelle à la simple vitesse, et n'ait pas considéré le cas de la nature; lui, dit-il, qui a résolu bien d'autres problèmes plus difficiles. On sait d'ailleurs que la question de la trajectoire dans un milieu résistant en raison du carré de la vitesse, fut proposée comme un défi, anx géomètres du continent, par un Anglais nommé Keil, qui croyait le problème insoluble, parce que son illustre compatriote ne l'avait pas résolu. Maintenant le calcul numérique des intégrales qui expriment le temps et les deux coordonnées du mobile en fonctions d'une quatrième variable, s'effectue aussi simplement que la question le comporte, et en poussant les approximations aussi loin qu'on veut. On en peut voir un exemple dans les *Exercices de calcul intégral,* de Legendre (**), où ces coordonnées sont calculées à moins d'un cent-millième de leurs valeurs.

Indépendamment de la force centrifuge provenant de la rotation de

(*) *Mémoires de l'Académie de Berlin,* année 1753.

(**) Tome Ier, page 336.

la Terre, et qui influe sur le mouvement des corps pesants, en diminuant la gravité, d'une quantité variable avec la latitude; cette rotation produit encore, dans ces mouvements, certaines déviations qu'il est intéressant de connaître, soit en elles-mêmes, soit pour savoir jusqu'à quel point elles peuvent influer sur la trajectoire des projectiles, et s'il est nécessaire d'y avoir égard dans la pratique de l'artillerie. Plusieurs physiciens ont mesuré, avec autant de précision qu'il a été possible, les petites distances dont les corps qui tombent d'une hauteur considérable, s'écartent du pied de la verticale. Laplace et M. Gauss ont soumis cette question au calcul; mais en intégrant les équations de ce mouvement à très peu près vertical, ils ont fait abstraction de la résistance de l'air, qui peut cependant avoir quelquefois une influence extrêmement grande sur le résultat. J'ai donc pensé qu'il serait utile de reprendre ce problème en entier, et d'en étendre la solution au cas général où le projectile est lancé dans l'air, avec une vitesse et suivant une direction quelconques.

Pour cela, j'ai d'abord formé les équations différentielles du mouvement absolu dans l'espace, en rapportant à des axes fixes les coordonnées du mobile; puis j'en ai déduit les équations du mouvement apparent, tel que nous l'observons près de la surface du globe, ou rapporté à des axes fixes à cette surface, qui participent, ainsi que nous, à la rotation de la Terre. Ces équations différentielles sont très compliquées; mais, en prenant la seconde de temps pour unité, la vitesse angulaire du mouvement diurne est une très petite fraction; ce qui permet de les réduire à une forme plus simple. On en déduit alors quelques conséquences générales, dont voici les énoncés.

Le mouvement de la Terre empêche un liquide, contenu dans un vase et tournant avec une vitesse constante autour d'un axe vertical, de parvenir rigoureusement à une figure permanente, qui serait celle d'un paraboloïde de révolution, si la Terre était considérée comme immobile.

Si un corps se meut sur une courbe donnée et attachée fixement à la surface du globe, l'équation différentielle de son mouvement ne

contient pas la vitesse de rotation de la Terre, et ce mouvement est le même, en conséquence, que si la Terre était en repos. Ainsi, pour une valeur donnée de la pesanteur, résultante de la figure et de la rotation du sphéroïde terrestre, les oscillations du pendule sont les mêmes dans tous les *azimuts* autour de la verticale; résultat qu'il était important de démontrer, vu le degré de précision que l'on apporte maintenant dans la détermination du pendule à secondes, en différents lieux de la Terre. Mais le mouvement diurne et la direction du plan des oscillations ont une petite influence sur la tension variable que le fil éprouve pendant qu'elles ont lieu, et qui n'est pas rigoureusement la même dans tous les azimuts.

Enfin, quand un projectile est lancé dans l'air suivant une direction quelconque, la rotation de la Terre n'augmente ni ne diminue la distance à laquelle il se trouve à chaque instant, du plan parallèle à l'équateur, mené par son point de départ.

Avant de chercher les intégrales des équations du mouvement apparent, dans le cas général, d'une grandeur et d'une direction quelconques de la vitesse initiale, j'ai considéré les cas particuliers les plus simples. Le premier est celui où le mobile part d'un point situé à une hauteur donnée au-dessus du sol, et est abandonné à l'action de la pesanteur, sans qu'on lui imprime aucune vitesse particulière, de sorte qu'il commence à tomber verticalement. La vitesse à son point de départ, provenant de la rotation de la Terre à laquelle il participe, étant plus grande que celle qui répond au pied de la verticale, on comprend que le mobile, quand il a atteint le sol, doit s'écarter du pied de cette ligne, à l'*est* ou dans le sens du mouvement vrai de la Terre. Mais le calcul peut seul donner la mesure de cet écart, surtout lorsqu'on a égard à la résistance de l'air: il fait voir, en effet, que la déviation a lieu vers l'*est*, et qu'elle est nulle dans le sens du méridien. Pour comparer à l'expérience, la formule qui en exprime la grandeur, j'ai choisi les observations de ce genre qui ont été faites en 1833 par M. le professeur Reich, dans les mines de la Saxe. La hauteur de la chute était de 158 mètres et demi; et M. Reich a con-

clu de la moyenne de 106 expériences, une déviation à l'*est*, de 28 millimètres et un tiers. Il a aussi trouvé à très peu près six secondes pour le temps de la chute; au moyen de cette donnée, j'ai pu calculer, sans aucune hypothèse, le coefficient de la résistance de l'air que le mobile a dû éprouver; et ensuite, la formule a donné 27 millimètres et demi pour la déviation; ce qui diffère de l'expérience, de moins d'un millimètre. Dans le vide, cette déviation ne surpasserait pas d'un dixième de millimètre, celle qui a lieu dans l'air; en sorte que dans cet exemple, la résistance de l'air n'a eu qu'une influence insensible.

Quand le projectile part de la surface de la Terre, et qu'il est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse donnée, on conçoit que, pendant la durée de son élévation, il doit s'écarter de la verticale, vers l'*ouest*, ou en sens contraire de la rotation de la Terre. Il semble qu'ensuite, durant sa chute, il devrait se rapprocher de cette ligne, et retomber à peu près à son point de départ; mais il n'en est point ainsi. Parvenu au point le plus haut de sa trajectoire, et lorsqu'il a perdu toute sa vitesse verticale, le projectile, en déviant vers l'*ouest*, a aussi acquis une vitesse horizontale dans le même sens, en vertu de laquelle il continue à dévier dans ce sens, du moins pendant une partie de sa chute. La difficulté analytiqne que ce second cas présente, est de raccorder, pour ainsi dire, les deux mouvements successifs, ascendant et descendant, du projectile, qui sont exprimés par des formules très différentes, lorsque l'on tient compte de la résistance de l'air. Pour appliquer à un exemple la formule relative à la déviation totale du mobile, quand il est retombé sur le sol, j'ai supposé que ce corps fût une balle, tirée verticalement par un fusil d'infanterie, avec une vitesse d'environ 400 mètres par secondes. La grandeur de cette déviation varie beaucoup avec celle de la résistance de l'air; en donnant successivement au coefficient de cette résistance des valeurs qui soient entre elles comme quatre et trois, on trouve des déviations vers l'*ouest* dans les deux cas, mais d'environ un et trois décimètres : dans le vide, cette déviation s'élèverait à une cinquantaine de mètres; en sorte qu'elle est réduite à un cinq-centième de sa valeur, par la plus grande des deux résistances.

J'ai encore examiné en particulier, le cas où la vitesse initiale du projectile est presque horizontale, ce qui comprend, pour fixer les idées, le tir à la *cible*. On trouvera dans mon Mémoire les formules qui s'y rapportent et qui en expriment toutes les circonstances, selon que le tir a lieu vers tel ou tel point de l'horizon. Ici, je me bornerai à dire que la vitesse initiale étant toujours d'environ 400 mètres, et la distance de la cible, placée au *but en blanc*, égale à 200 mètres, les déviations horizontale et verticale de la balle, dues au mouvement de la Terre, s'élèveraient à peine à un demi-centimètre, c'est-à-dire qu'elles n'influent pas sensiblement sur la justesse du tir et sont inutiles à considérer dans la pratique. Ces déviations sont également négligeables dans le tir du canon, et dans tous les mouvements qui ont lieu suivant une direction à peu près horizontale.

Dans le cas général, les effets que produit le mouvement de la Terre dans le mouvement d'un projectile, sont d'abord des accroissements positifs ou négatifs, soit de l'intervalle de temps que le mobile emploie à aller de son point de départ au point où il retombe sur le terrain, soit de la distance du second point au premier, que l'on appelle la *portée horizontale*. Les signes de ces accroissements dépendent de la direction du plan vertical dans lequel le projectile est lancé : il y a augmentation dans une direction et diminution dans une autre; leurs valeurs sont exprimées par des intégrales doubles, dont le calcul numérique serait très pénible. Le mouvement diurne fait, en outre, sortir le mobile du plan vertical où il a été projeté; ce qui donne lieu à une déviation horizontale, dont la valeur se compose de deux parties distinctes, exprimées aussi par des intégrales doubles. L'une de ces déviations partielles est indépendante de la direction du plan vertical; elle a toujours lieu à droite de l'observateur placé au point de départ et tourné vers la trajectoire; à notre latitude, on peut la considérer comme étant l'effet principal de la rotation du globe; et, heureusement, on en obtient des limites plus faciles à calculer que sa valeur même, qui se réduiront en nombres, si l'on veut, au moyen de la longueur de la portée et de la durée du trajet, données par l'observa-

tion, et suffiront pour apprécier la grandeur de la déviation. En appliquant, par exemple, ces limites au tir de la bombe, tel qu'il a lieu dans les exercices des *polygones*, c'est-à-dire sous l'angle de 45°, avec une vitesse initiale de 120 mètres par seconde, qui donne une portée d'environ 1200 mètres, pour un projectile de 27 centimètres de diamètre et du poids de 51 kilogrammes (*); on trouve que la déviattion du point de chute sera comprise entre 90 et 120 centimètres, lorsqu'on tirera dans un plan vertical, tangent au *parallèle* du point de départ. Elle aura lieu vers le *midi*, quand on tirera vers l'*est*, et vers le *nord*, si l'on tire vers l'*ouest*. En l'évaluant à un mètre, et observant qu'un tel écart à la distance de 1200 mètres, répond à un angle d'à peu près trois minutes, il s'ensuit que, pour atteindre plus sûrement le but, il faudrait tirer à gauche du plan donné, dans un autre plan qui ferait avec celui-là un angle de trois minutes, dont la considération peut influer sur la justesse du tir et sur la chance d'atteindre le *tonneau*, dans les exercices où le canonnier doit apporter beaucoup de précision. La déviation horizontale sera un peu moindre et s'observera vers l'*est*, quand on tirera vers le *nord*; elle sera un peu plus grande et aura lieu vers l'*ouest*, quand on tirera vers le *midi*. Ajoutons encore, que dans le tir de la bombe à grande portée, par exemple à une distance du but, d'environ 4000 mètres, ce qui suppose une vitesse initiale d'à peu près le tiers de 800 mètres, sous l'angle de 45°, et pour un projectile de 90 kilogrammes et d'un tiers de mètre de diamètre, les limites de la déviation, en tirant à l'*est* ou à l'*ouest*, seront à peu près 5 mètres et 10 mètres; en évaluant donc sa grandeur à 7 ou 8 mètres, on voit que dans les siéges, des édifices et des personnes ont pu être atteints par la chute d'une bombe, à cause du mouvement de la Terre, et d'autres ne pas l'être, pour la même cause.

Ces nombres, et ceux qu'on a cités plus haut, se rapportent à une latitude moyenne; ils varieront avec celle du lieu de l'expérience : à

(*) La bombe de 10 pouces et de 104 livres.

l'équateur, et lorsque le tir a lieu dans son plan, la déviation horizontale s'évanouit, tandis que les accroissements de la durée du trajet et de la longuenr de la portée y atteignent leur *maximum;* dans les hautes latitudes, ce sont, au contraire, la déviation qui approche de son *maximum*, et ces accroissements qui diminuent: au pôle, la déviation horizontale, la même en ce point pour le tir dans tous les plans verticaux, surpasserait d'à peu près moitié celle qui a lieu dans notre région. Partout, les accroissements de la portée et du temps sont nuls, quand la vitesse initiale est dirigée dans le plan du méridien.

---

(1). Le projectile est une sphère homogène; c'est le mouvement de son centre de gravité ou de figure que l'on considère; on y suppose sa masse entière réunie, et la résistance de l'air directement appliquée.

La rotation de la Terre a une petite influence sur le mouvement des corps près de sa surface; son mouvement de translation n'en a aucune; c'est pourquoi j'en ferai abstraction, et je regarderai le centre du globe comme un point fixe.

Soit C ce point. Au bout du temps quelconque t, écoulé depuis l'origine du mouvement, soit aussi M le point de sa *trajectoire* où se trouve le mobile. Par le point C, menons trois axes fixes et rectangulaires $Cx_{,}$, $Cy_{,}$, $Cz_{,}$, et désignons par $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, les coordonnées de M rapportées à ces axes. En appelant V la somme des molécules du sphéroïde terrestre, divisées par leurs distances respectives au point M, les composantes parallèles à ces mêmes axes, de l'attraction de la Terre sur le point matériel situé en M, seront exprimées, comme on sait, par les différences partielles $\frac{dV}{dx_{,}}$, $\frac{dV}{dy_{,}}$, $\frac{dV}{dz_{,}}$; et selon qu'elles auront des valeurs positives ou négatives, elles agiront dans le sens des demi-axes $Cx_{,}$, $Cy_{,}$, $Cz_{,}$, des coordonnées positives, ou dans le sens contraire. Représentons aussi par φ la force accélératrice provenant de la résistance de l'air, et par λ, μ, ν, les angles que fait sa direction

avec des parallèles à ces trois droites, menées par le point M, de sorte que $\varphi \cos \lambda$, $\varphi \cos \mu$, $\varphi \cos \nu$, soient les composantes de φ, suivant les mêmes directions que celles de l'attraction. En prenant le temps t pour la variable indépendante, dont la différentielle est constante, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_{,}}{dt^2} &= \frac{dV}{dx_{,}} + \varphi \cos \lambda, \\ \frac{d^2y_{,}}{dt^2} &= \frac{dV}{dy_{,}} + \varphi \cos \mu, \\ \frac{d^2z_{,}}{dt^2} &= \frac{dV}{dz_{,}} + \varphi \cos \nu, \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

pour les trois équations différentielles secondes du mouvement absolu du projectile dans l'espace.

On prendra le plan du *méridien* passant par le point de départ du mobile, c'est-à-dire, le plan de ce point et de l'axe de rotation de la Terre, pour celui des $y_{,}$ et $z_{,}$; les demi-axes $Cy_{,}$ et $Cz_{,}$ seront compris dans notre hémisphère, le second sera dirigé vers le pôle, et le premier sera compris dans le plan de l'équateur, ainsi que l'axe des $x_{,}$. On représentera par r le rayon vecteur CM, par θ l'angle compris entre CM et le demi-axe $Cz_{,}$, et par ψ l'angle que fait le plan de ces deux droites avec celui des $y_{,}$ et $z_{,}$; en sorte qu'au bout du temps t, les coordonnées polaires du mobile soient r, θ, ψ, et qu'on ait en conséquence

$$z_{,} = r \cos \theta, \quad y_{,} = r \sin \theta \cos \psi, \quad x_{,} = r \sin \theta \sin \psi.$$

Soit aussi n la vitesse angulaire du mouvement diurne de la Terre; $nr \sin \theta$ sera la vitesse absolue de l'air au point M; et cette dernière vitesse étant tangente au *parallèle* passant par ce point, ses composantes par rapport aux directions des coordonnées $z_{,}$, $y_{,}$, $x_{,}$, seront zéro, $-nr \sin \theta . \sin \psi$, $nr \sin \theta . \cos \psi$, en supposant le demi-axe $Cx_{,}$ dirigé vers l'*orient*. Les deux dernières composantes pourront être remplacées par $-nx_{,}$ et $ny_{,}$; au point M, les trois composantes de la vitesse relative du mobile et de l'air, auront donc pour valeurs,

abstraction faite du signe,

$$\frac{dz_{,}}{dt}, \quad \frac{dy_{,}}{dt} + nx_{,}, \quad \frac{dx_{,}}{dt} - ny_{,};$$

et en désignant par v, cette vitesse, on aura

$$v^2 = \frac{dz_{,}^2}{dt^2} + \left(\frac{dy_{,}}{dt} + \quad n_{,}\right)^2 + \left(\frac{dx_{,}}{dt} - ny_{,}\right)^2.$$

On considérera la résistance de l'air comme une fonction donnée de cette vitesse relative; et de plus, on supposera cette force directement opposée à cette vitesse: on aura par conséquent

$$\frac{dz_{,}}{dt} = - v\cos\lambda, \quad \frac{dy_{,}}{dt} + nx_{,} = - v\cos\mu, \quad \frac{dx_{,}}{dt} - ny_{,} = - v\cos\nu,$$

pour déterminer les angles λ, μ, ν, qui répondent à la direction de φ au point M.

Après qu'on aura fait une hypothèse sur la forme de la fonction φ, les équations (a) ne contiendront plus que les inconnues $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, et leurs différentielles, ou, si l'on veut, les inconnues r, θ, ψ; en les intégrant, du moins par approximation, elles feront donc connaître, à un instant quelconque, la position du mobile dans l'espace; mais dans la question qui nous occupe, c'est à des axes fixes à la surface de la Terre, et participant à son mouvement de rotation, qu'il faut rapporter la position du projectile, c'est-à-dire qu'il s'agit de déterminer son mouvement apparent, tel qu'on l'observe à cette surface, ce qui exige que l'on change les inconnues $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, en d'autres coordonnées.

(2). Soit donc O, un point déterminé de la surface du globe. Par ce point, menons trois axes rectangulaires Oz', Oy', Ox'; le premier dirigé suivant le prolongement du rayon CO, le second compris dans le plan du méridien et dirigé vers le *nord*, et le troisième dans le plan

du parallèle, et dirigé vers l'*est*, ou dans le sens du mouvement diurne. Au bout du temps t, soient z', y', x', les coordonnées du lieu M du mobile, rapportées à ces nouveaux axes. Si l'on suppose qu'à l'origine du mouvement, le méridien du point O coïncidait avec le plan des $y_,$ et $z_,$, l'angle compris entre ces deux plans au bout du temps t, sera égal à nt. Je désignerai par γ la latitude du point O, ou plus exactement, l'angle compris entre le rayon CO et sa projection sur l'équateur; et je représenterai par l la longueur de ce rayon. Les coordonnées du point O, rapportées aux axes $Cx_,$, $Cy_,$, $Cz_,$, se déduiront de $x_,$, $y_,$, $z_,$, en y faisant $r = l$, $\theta = 90° - \gamma$, $\psi = nt$; en sorte qu'elles auront pour valeurs $l\cos\gamma\sin nt$, $l\cos\gamma\cos nt$, $l\sin\gamma$. D'après les formules connues de la transformation des coordonnées, dont on change à la fois, l'origine et les directions, on aura alors

$$\begin{aligned}
x' &= (x_, - l\cos\gamma\sin nt)\cos nt - (y_, - l\cos\gamma\cos nt)\sin nt,\\
y' &= (z_, - l\sin\gamma)\cos\gamma - (y_, - l\cos\gamma\cos nt)\sin\gamma\cos nt\\
&\quad - (x_, - l\cos\gamma\sin nt)\sin\gamma\sin nt,\\
z' &= (z_, - l\sin\gamma)\sin\gamma + (y_, - l\cos\gamma\cos nt)\cos\gamma\cos nt\\
&\quad + (x_, - l\cos\gamma\sin nt)\cos\gamma\sin nt,
\end{aligned}$$

ou bien, en réduisant,

$$\begin{aligned}
x' &= x_,\cos nt - y_,\sin nt,\\
y' &= z_,\cos\gamma - y_,\sin\gamma\cos nt - x_,\sin\gamma\sin nt,\\
z' &= z_,\sin\gamma + y_,\cos\gamma\cos nt + x_,\cos\gamma\sin nt - l;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire réciproquement

$$\begin{aligned}
x_, &= x'\cos nt - y'\sin\gamma\sin nt + (z' + l)\cos\gamma\sin nt,\\
y_, &= -x'\sin nt - y'\sin\gamma\cos nt + (z' + l)\cos\gamma\cos nt,\\
z_, &= y'\cos\gamma + (z' + l)\sin\gamma,
\end{aligned}$$

pour les valeurs de $x_,$, $y_,$, $z_,$, qu'il faudra substituer dans les équations (a), et dans celles qui déterminent la vitesse v et sa direction.

Les coefficients de $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$, dans les valeurs de x', y', z', doivent être les cosinus des angles que des parallèles aux axes des $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$, menées par le point M, font avec ceux des x', y', z'; et c'est, en effet, ce qu'il est aisé de vérifier. Il s'ensuit donc que si l'on appelle λ', μ', ν', les angles que fait la direction de la vitesse v, contraire à celle de la force φ, avec ces nouveaux axes, on aura

$$v\cos\lambda' = -v\cos\lambda.\cos nt + v\cos\mu.\sin nt,$$
$$v\cos\mu' = -v\cos\nu.\cos\gamma + v\cos\mu.\sin\gamma\cos nt + v\cos\lambda.\sin\gamma\sin nt,$$
$$v\cos\nu' = -v\cos\nu.\sin\gamma - v\cos\mu.\cos\gamma\cos nt - v\cos\lambda.\cos\gamma\sin nt.$$

En vertu des valeurs de $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$, on aura aussi

$$\frac{dx_{\prime}}{dt} - ny_{\prime} = \frac{dx'}{dt}\cos nt - \frac{dy'}{dt}\sin\gamma\sin nt + \frac{dz'}{dt}\cos\gamma\sin nt,$$
$$\frac{dy_{\prime}}{dt} + nx_{\prime} = -\frac{dx'}{dt}\sin nt - \frac{dy'}{dt}\sin\gamma\cos nt + \frac{dz'}{dt}\cos\gamma\cos nt,$$
$$\frac{dz_{\prime}}{dt} = \frac{dy'}{dt}\cos\gamma + \frac{dz'}{dt}\sin\gamma,$$

pour les valeurs précédentes de $-v\cos\lambda$, $-v\cos\mu$, $-v\cos\nu$; et toutes réductions faites, il en résultera simplement

$$v\cos\lambda' = \frac{dx'}{dt},\ v\cos\mu' = \frac{dy'}{dt},\ v\cos\nu' = \frac{dz'}{dt}.$$

La vitesse relative v du mobile et de l'air, est donc en grandeur et en direction, la vitesse même du projectile dans son mouvement apparent; ce qui tient à la nature du mouvement de rotation du fluide, et n'aurait plus lieu, en général, si l'air avait un autre mouvement, comme dans le phénomène des *vents alisés*, par exemple. Si l'on appelle s l'arc de la trajectoire apparente, compté à partir d'un point fixe sur cette courbe et dans le sens du mouvement du projectile, on aura

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2;$$

la différentielle ds sera positive ainsi que dt, et les équations précé-

dentes donneront alors

$$v = \frac{ds}{dt},\ \cos\lambda' = \frac{dx'}{ds},\ \cos\mu' = \frac{dy'}{ds},\ \cos\nu' = \frac{dz'}{ds}.$$

Cela posé, les équations (a) deviendront d'abord

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x'}{dt^2}\cos nt - \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\gamma\sin nt + \frac{d^2z'}{dt^2}\cos\gamma\sin nt\\
&-2n\left(\frac{dx'}{dt}\sin nt + \frac{dy'}{dt}\sin\gamma\cos nt - \frac{dz'}{dt}\cos\gamma\cos nt\right) - n^2x_,\\
&= \frac{dV}{dx_,} + \varphi\cos\lambda,\\
&-\frac{d^2x'}{dt^2}\sin nt - \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\gamma\cos nt + \frac{d^2z'}{dt^2}\cos\gamma\cos nt\\
&-2n\left(\frac{dx'}{dt}\cos nt - \frac{dy'}{dt}\sin\gamma\sin nt + \frac{dz'}{dt}\cos\gamma\sin nt\right) - n^2y_,\\
&= \frac{dV}{dy_,} + \varphi\cos\mu,\\
&\quad\frac{d^2y'}{dt^2}\cos\gamma + \frac{d^2z'}{dt^2}\sin\gamma = \frac{dV}{dz_,} + \varphi\cos\nu;
\end{aligned}$$

en considérant successivement V comme une fonction de $x_,$, $y_,$, $z_,$, et comme une fonction de x', y', z', on aura

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dx'} &= \frac{dV}{dx_,}\cos nt - \frac{dV}{dy_,}\sin nt,\\
\frac{dV}{dy'} &= -\frac{dV}{dx_,}\sin\gamma\sin nt - \frac{dV}{dy_,}\sin\gamma\cos nt + \frac{dV}{dz_,}\cos\gamma,\\
\frac{dV}{dz'} &= \frac{dV}{dx_,}\cos\gamma\sin nt + \frac{dV}{dy_,}\cos\gamma\cos nt + \frac{dV}{dz_,}\sin\gamma;
\end{aligned}$$

et il sera facile de changer les équations précédentes en celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x'}{dt^2} &= 2n\left(\frac{dy'}{dt}\sin\gamma - \frac{dz'}{dt}\cos\gamma\right) + n^2x' + \frac{dV}{dx'} - \varphi\frac{dx'}{ds},\\
\frac{d^2y'}{dt^2} &= -2n\frac{dx'}{dt}\sin\gamma + n^2[y'\sin\gamma - (z'+l)\cos\gamma]\sin\gamma + \frac{dV}{dy'} - \varphi\frac{dy'}{ds},\\
\frac{d^2z'}{dt^2} &= 2n\frac{dx'}{dt}\cos\gamma - n^2[y'\sin\gamma - (z'+l)\cos\gamma]\cos\gamma + \frac{dV}{dz'} - \varphi\frac{dz'}{ds},
\end{aligned}\right\}\ (b)$$

qui seront les équations du mouvement apparent, qu'on se proposait

de trouver, et que l'on réduira à une forme plus simple par les considérations suivantes.

(3). La Terre étant composée de couches à très peu près sphériques, concentriques, et dont chacune a partout une même densité, la valeur de V est de la forme

$$V = \frac{l^2 f}{r} + \epsilon f U,$$

où l'on désigne par f, une force très peu différente de l'attraction au point O, dont la distance au centre C est l; par ϵ, une petite fraction qui a pour valeur, environ un 300e; et par U, une fonction donnée de x', y', z'. La valeur du rayon vecteur r du point M sera donnée par l'équation

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + (z' + l)^2.$$

Si O est voisin du point de départ du projectile, les coordonnées x', y', z', seront très petites par rapport à l, dans toute l'étendue de la trajectoire; on pourra alors développer les différences partielles $\frac{dU}{dx'}$, $\frac{dU}{dy'}$, $\frac{dU}{dz'}$, en séries très convergentes, ordonnées suivant les puissances et les produits de $\frac{x'}{l}$, $\frac{y'}{l}$, $\frac{z'}{l}$; et le développement correspondant de U sera

$$U = F + x'G + y'H + z'K + \frac{x'^2}{l}G' + \frac{x'y'}{l}H' + \text{etc.};$$

F étant une constante arbitraire, et G, H, etc., des constantes données.

Au point O, les composantes de l'attraction, suivant les axes des x', y', z', ou les valeurs de $\frac{dV}{dx'}$, $\frac{dV}{dy'}$, $\frac{dV}{dz'}$, qui répondent à $x' = 0$, $y' = 0$, z' o, seront $\epsilon f G$, $\epsilon f H$, $-f + \epsilon f K$. Pour en déduire celles de la pesanteur, il y faudra ajouter les composantes de la force

centrifuge due à la rotation de la Terre; or, ses trois composantes sont zéro, $-n^2 l \sin\gamma\cos\gamma$, $n^2 l\cos^2\gamma$, en observant qu'au point O la force centrifuge est égale à $n^2 l \cos\gamma$, et dirigée suivant le prolongement de la perpendiculaire à l'axe de rotation, de sorte que sa direction fait avec les axes des x', y', z', des angles égaux à $90°$, $90°+\gamma$, γ. Par conséquent, si l'on appelle g la pesanteur en ce point, et g', h', k', les angles compris entre sa direction et les axes des x', y', z', on aura

$$\left.\begin{aligned} g\cos g' &= \epsilon f\mathrm{G}, \\ g\cos h' &= \epsilon f\mathrm{H} - n^2 l \sin\gamma\cos\gamma, \\ g\cos k' &= -f + \epsilon f\mathrm{K} + n^2 l\cos^2\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

pour les valeurs complètes de ses trois composantes. Ces formules doivent coïncider avec les seconds membres des équations (b), en y supprimant les termes dépendants de la vitesse du mobile, et y faisant $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$; ce qui a lieu effectivement. On vérifiera de même que les composantes de l'attraction jointe à la force centrifuge, qui répondent au point M, coïncident aussi avec ces seconds membres, en y supprimant seulement les termes relatifs à la vitesse du projectile, et quelles que soient les coordonnées x', y', z'.

Le rapport de $n^2 l$ à g est une fraction très peu différente de ϵ; si donc on néglige les carrés et le produit de ces deux fractions, et si l'on observe que la force g est une quantité positive, on déduira des équations précédentes

$$g = f - \epsilon f\mathrm{K} - n^2 l\cos^2\gamma, \quad \cos k' = -1;$$

ce qui fait connaître l'intensité de la pesanteur au point O, et montre que cette force fait avec l'axe Oz', un angle dont le supplément est de l'ordre de petitesse de ϵ.

Dans le développement de V, je négligerai les termes qui ont l^2 pour diviseur, et ceux qui ont l pour diviseur et ϵ pour coefficient.

De cette manière, on aura

$$V = lf - z'f + \frac{z'^2 f}{l} + \varepsilon f k + \varepsilon f G x' + \varepsilon f H y' + \varepsilon f K z'.$$

A ce degré d'approximation, il faudra aussi négliger les termes des équations (*b*) qui dépendent de n^2 et de l'une des variables x', y', z'; car, si l'on fait $\frac{n^2 l}{g} = \delta$, le terme $n^2 x'$, par exemple, deviendra $\frac{g x' \delta}{l}$, et sera par conséquent du même ordre de petitesse que ceux qui se trouvent négligés dans les différences partielles de V.

Cela posé, et en ayant égard aux formules (*c*), les équations (*b*) se réduiront à

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x'}{dt^2} &= 2n\left(\frac{dy'}{dt}\sin\gamma - \frac{dz'}{dt}\cos\gamma\right) + g\cos g' - \varphi\frac{dx'}{ds}, \\ \frac{d^2y'}{dt^2} &= -2n\frac{dx'}{dt}\sin\gamma + g\cos h' - \varphi\frac{dy'}{ds}, \\ \frac{d^2z'}{dt^2} &= 2n\frac{dx'}{dt}\cos\gamma + g\cos k' + \frac{2z'f}{l} - \varphi\frac{dz'}{ds}; \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

mais afin de les rendre plus immédiatement applicables, nous y changerons x', y', z', en d'autres coordonnées peu différentes de celles-là.

(4). Pour cela, élevons par le point O, une verticale Oz dirigée vers le *zénith*, ou en sens contraire de la pesanteur, et dans le plan horizontal, perpendiculaire à Oz, tirons arbitrairement deux axes Ox et Oy, perpendiculaires entre eux. Soient x, y, z, les coordonnées de M, rapportées à ces axes Ox, Oy, Oz. On aura

$$z = -x'\cos g' - y'\cos h' - z'\cos k',$$

en observant que Oz fait avec les axes des x', y', z', des angles égaux aux suppléments de g', h', k'. On aura, en même temps,

$$\begin{aligned} y &= x'\cos x'Oy + y'\cos y'Oy + z'\cos z'Oy, \\ x &= x'\cos x'Ox + y'\cos y'Ox + z'\cos z'Ox. \end{aligned}$$

On pourra supposer que Ox et Oy s'écartent très peu de Ox' et Oy', de sorte que les angles $x'Ox$ et $y'Oy$ soient de l'ordre de petitesse de la fraction ε. En négligeant leurs carrés, on aura alors

$$\cos x'Ox = 1, \quad \cos y'Oy = 1.$$

Je supposerai de plus, que l'axe Oy soit compris dans le plan du méridien; l'axe Ox' étant perpendiculaire à ce plan, nous aurons

$$\cos x'Oy = 0;$$

et comme on doit avoir

$$\cos x'Ox \,.\, \cos y'Ox + \cos x'Oy \,.\, \cos y'Oy + \cos g' \cos h' = 0,$$

il en résultera aussi

$$\cos y'Ox = 0,$$

en observant que le produit $\cos g' \cos h'$ est de l'ordre de petitesse des quantités que nous négligeons. Enfin, à cause des équations

$$\cos x'Ox \,.\, \cos z'Ox + \cos x'Oy \,.\, \cos z'Oy + \cos g' \cos k' = 0,$$
$$\cos y'Ox \,.\, \cos z'Ox + \cos y'Oy \,.\, \cos z'Oy + \cos h' \cos k' = 0,$$

et de $\cos k' = -1$, nous aurons

$$\cos z'Ox = \cos g', \quad \cos z'Oy = \cos h',$$

et par conséquent

$$x = x' + z' \cos g', \quad y = y' + z' \cos h'.$$

De ces valeurs de x, y, z, on déduit réciproquement

$$x' = x - z \cos g',$$
$$y' = y - z \cos h',$$
$$z' = z + x \cos g' + y \cos h',$$

en négligeant toujours les carrés et le produit de $\cos g'$ et $\cos h'$.

Maintenant, après avoir éliminé x', y', z', des équations (d), on les changera facilement en celles-ci :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2n\left(\frac{dy}{dt}\sin\gamma - \frac{dz}{dt}\cos\gamma\right) - 2n\left(\frac{dz}{dt}\cos h'\sin\gamma + \frac{dy}{dt}\cos h'\cos\gamma\right) - \varphi\frac{dx}{ds},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2n\frac{dx}{dt}\sin\gamma + 2n\left(\frac{dz}{dt}\cos g'\sin\gamma + \frac{dx}{dt}\cos h'\cos\gamma\right) - \varphi\frac{dy}{ds},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2n\frac{dx}{dt}\cos\gamma - 2n\left(\frac{dy}{dt}\cos g'\sin\gamma - \frac{dx}{dt}\cos h'\sin\gamma\right) - g + \frac{2gz}{l} - \varphi\frac{dz}{ds}.$$

On pourra, pour plus de simplicité, négliger les termes de ces formules qui ont $n \cos g'$ ou $n \cos h'$ pour facteur, et dont l'influence sur les valeurs de x, y, z, serait à peu près insensible. On négligera par la même raison, le terme $\frac{2gz}{l}$, provenant de la variation de la pesanteur dans le sens de la hauteur, et l'on considérera l'angle γ, comme exprimant la latitude du point O.

J'admettrai l'hypothèse ordinaire de la résistance de l'air, proportionnelle au carré de la vitesse; et je ferai, en conséquence,

$$\varphi = c\,\frac{ds^2}{dt^2};$$

c étant un coefficient proportionnel à la densité de l'air au point M, que l'on pourra, en général, considérer comme une quantité constante dans toute l'étendue de la trajectoire : si l'on appelle ξ la hauteur due à la vitesse $\frac{ds}{dt}$ de sorte qu'on ait $\frac{ds^2}{dt^2} = 2g\xi$ et $\varphi = 2cg\xi$, il faudra pour l'homogénéité des quantités φ et g, que $2c\xi$ soit un nombre abstrait, ou que $\frac{1}{c}$ soit une ligne. L'air étant un fluide pesant, exercera en ou-

tre, sur le projectile, une pression hydrostatique; ce qui exigera que l'on fasse subir une diminution à la pesanteur g qui aurait lieu dans le vide; de plus cette réduction sera elle-même susceptible dans le mouvement progressif que nous considérons, d'une modification semblable à celle qui répond, d'après la remarque de M. Bessel, au mouvement oscillatoire du pendule; mais nous ne nous occuperons point ici de cette question; et nous regarderons la valeur de g comme une donnée de l'expérience.

Les équations différentielles du mouvement apparent du projectile, se réduiront donc finalement à

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= 2n\left(\frac{dy}{dt}\sin\gamma - \frac{dz}{dt}\cos\gamma\right) - c\,\frac{ds}{dt}\,\frac{dx}{dt},\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= -\,2n\,\frac{dx}{dt}\sin\gamma - c\,\frac{ds}{dt}\,\frac{dy}{dt},\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= 2n\,\frac{dx}{dt}\cos\gamma - g - c\,\frac{ds}{dt}\,\frac{dz}{dt}.
\end{aligned}\right\}\quad (e)$$

Elles suffiront pour déterminer au degré d'approximation que l'on peut désirer, l'influence de la rotation du globe sur ce mouvement; on n'oubliera pas que les axes des x et des y sont les intersections du plan horizontal, avec les plans du parallèle et du méridien, et qu'à partir du point O, les x positives sont portées du côté de l'*est*, les x négatives du côté de l'*ouest*, les y positives vers le *nord*, les y négatives vers le *midi*. L'axe des z positives est vertical et dirigé de bas en haut.

On appliquera tout-à-l'heure ces équations à divers exemples; auparavant il y a quelques remarques qu'il ne sera pas inutile de faire.

(5). Les équations (e) s'étendront facilement au cas d'un point matériel, assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée et attachée à la surface de la Terre.

Pour cela, représentons par

$$L = 0, \quad L' = 0,$$

les deux équations de cette courbe; L et L′ étant des fonctions données de x, y, z. Il suffira, comme on sait, d'ajouter aux seconds membres des trois équations (e), les quantités correspondantes

$$\omega \frac{dL}{dx} + \omega' \frac{dL'}{dx}, \quad \omega \frac{dL}{dy} + \omega' \frac{dL'}{dy}, \quad \omega \frac{dL}{dz} + \omega' \frac{dL'}{dz},$$

dans lesquelles ω et ω' sont des coefficients inconnus. On éliminera ensuite ces deux nouvelles inconnues, en ajoutant les trois équations après les avoir multipliés respectivement par dx, dy, dz; les termes dépendants de n disparaissent en même temps, et il vient

$$\frac{dsd^2s}{dt^2} = -gdz - c\frac{ds^3}{dt^2}, \qquad (f)$$

en observant qu'on a

$$dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = \tfrac{1}{2}d.ds^2 = dsd^2s,$$

$$\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz = dL = 0,$$

$$\frac{dL'}{dx}dx + \frac{dL'}{dy}dy + \frac{dL'}{dz}dz = dL' = 0.$$

On pourra tirer des équations de la courbe donnée, des valeurs de x, y, z, en fonctions de s; en les substituant dans l'équation (f), on aura donc, entre les variables s et t, l'équation différentielle du mouvement sur cette courbe. Il en résulte qu'abstraction faite de la partie de g qui dépend de la rotation de la Terre, cette rotation n'a aucune autre influence sur le mouvement dont il s'agit. Ainsi, par exemple, en chaque point de la surface du globe, et pour une valeur donnée de g, les oscillations du pendule sont indépendantes du mouvement diurne, et les mêmes dans tous les *azimuts* autour de la verticale; ce qu'il était bon de faire voir, vu le degré de précision que l'on apporte maintenant dans les mesures du pendule à secondes, en différens lieux de la Terre.

La pression exercée par un point matériel sur la courbe qu'il est

forcé de décrire, n'est pas, comme sa vitesse, indépendante de la rotation du globe; c'est ce que l'on verra en effet, en la déterminant de la manière suivante.

Je représente par X, Y, Z, les seconds membres des équations (e), abstraction faite des termes provenant de la résistance de l'air; on aura

$$X = 2n\left(\frac{dy}{dt}\sin\gamma - \frac{dz}{dt}\cos\gamma\right),$$

$$Y = -2n\frac{dx}{dt}\sin\gamma,$$

$$Z = 2n\frac{dx}{dt}\cos\gamma - g;$$

et ces quantités exprimeront les composantes horizontale et verticale de la force qui agit sur un point matériel pesant, en mouvement dans le vide, près de la surface du globe. Par le point quelconque M de sa trajectoire, je mène trois axes rectangulaires, savoir, le rayon de courbure, la tangente dans le sens du mouvement, une des deux parties de la perpendiculaire au plan osculateur. Soient P, Q, R, les composantes de la même force, suivant ces trois demi-axes; la force Q diminuée de la résistance de l'air, fera varier la vitesse du mobile sur la courbe donnée; la force R multipliée par la masse de ce corps, sera une composante de la pression exercée sur la courbe; l'autre composante aura pour valeur le produit de cette masse et de l'excès de la force centrifuge sur la force P; excès qui sera égal à $\frac{1}{\rho}\frac{ds^2}{dt^2} - P$, en désignant par ρ le rayon de courbure au point M. Or, on voit que la résultante de ces deux dernières forces, ou la pression totale que la trajectoire éprouvera en chacun de ses points, dépendra, à raison des forces P et R, du mouvement diurne du globe, de sa direction par rapport à celle de la vitesse du mobile, et de la latitude du point O.

Supposons, par exemple, qu'on n'ait point égard à la résistance de l'air, et que le mobile décrive uniformément, dans un plan horizontal, un cercle du rayon λ, avec une vitesse angulaire m. En plaçant l'origine O des coordonnées au centre de ce cercle, et comptant le temps t à

partir d'un passage du mobile dans l'axe des x, on aura

$$x = \lambda \cos mt, \quad y = \lambda \sin mt, \quad z = 0;$$

d'où il résultera, pour ce cas particulier,

$$X = 2mn\lambda \sin\gamma \cos mt,$$
$$Y = 2mn\lambda \sin\gamma \sin mt,$$
$$Z = -2mn\lambda \cos\gamma \sin mt - g.$$

Cette dernière force, prise avec un signe contraire et multipliée par la masse du mobile, exprimera la pression variable que la trajectoire éprouvera dans le sens de la pesanteur. La résultante des forces X et Y sera égale à $2mn\lambda \sin\gamma$, et dirigée suivant le prolongement de λ; elle s'ajoutera à la force centrifuge $m^2\lambda$, et il en résultera pour la pression horizontale, une valeur constante, égale au produit de $2mn\lambda \sin\gamma + m^2\lambda$, et de la masse du mobile.

Si l'on considère, de même, le mouvement du pendule simple dans un plan vertical, que ϵ soit l'angle compris entre ce plan et celui des x et z, que l'on désigne par λ la longueur constante de ce pendule, et, à un instant quelconque, par θ l'angle qu'il fait avec la verticale dirigée dans le sens de la pesanteur, on aura

$$x = \lambda \cos \epsilon \sin \theta, \quad y = \lambda \sin \epsilon \sin \theta, \quad z = -\lambda \cos \theta, \quad ds = \lambda d\theta.$$

Sans qu'on soit obligé de négliger la résistance de l'air, l'équation (f) fera connaître sous forme finie, la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de θ, et l'on en conclura sans difficulté la tension variable du fil, ainsi que la force Q perpendiculaire au plan des oscillations. En calculant cette dernière force, on trouve qu'elle est trop petite pour écarter sensiblement le pendule de son plan, et avoir aucune influence appréciable sur son mouvement.

Quoique d'après les valeurs générales des forces X, Y, Z, la formule $Xdx + Ydy + Zdz$ se réduise à $-gdz$, on n'en doit pas conclure

qu'un liquide homogène, soumis à ces forces, contenu dans un vase, et tournant uniformément autour de l'axe Oz, parviendrait à une figure permanente, ainsi que cela a lieu, lorsqu'on a seulement égard à la pesanteur et aux forces centrifuges des points du fluide, résultantes de sa rotation. En effet, pour cet équilibre des forces centrifuges et des forces X, Y, Z, il faudrait que celles-ci, étant réduites à des fonctions de x, y, z, satisfissent identiquement aux conditions d'intégrabilité de la formule $Xdx + Ydy + Zdz$, savoir :

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{dX}{dz}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}.$$

Or, en désignant par m la vitesse angulaire et constante du fluide, on aurait, dans le mouvement dont il s'agit,

$$\frac{dx}{dt} = \mp my, \quad \frac{dy}{dt} = \pm mx, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

et par conséquent

$$X = \pm 2nmx \sin\gamma, \quad Y = \pm 2nmy \sin\gamma, \quad Z = \mp 2nmy \cos\gamma - g;$$

ce qui ne satisfait pas aux équations précédentes, excepté au pôle, où l'on a $\gamma = 90°$. En tout autre point de la Terre, la figure permanente d'un liquide tournant dans un vase, autour d'un axe vertical, est donc rigoureusement impossible, à raison du mouvement diurne de la Terre; mais la vitesse angulaire n de ce mouvement étant une très petite fraction, moindre qu'un millième, quand on prend la seconde pour unité, il s'ensuit que cette impossibilité ne saurait être reconnue par l'expérience.

(6). Reprenons actuellement les équations (e) du mouvement apparant d'un point matériel entièrement libre; et supposons d'abord que la direction de la trajectoire s'écarte très peu de la verticale; en sorte que les cosinus $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$, des angles que fait la tangente au point

quelconque M, avec les axes horizontaux des x et des y, soient de très petites fractions, dont on négligera les carrés et le produit. Les expressions de x, y, z, en fonctions de t, seront différentes, selon que le mouvement aura lieu dans le sens de la pesanteur ou en sens contraire; nous considérerons ces deux cas successivement en commençant par le premier.

Soit donc D un point de la verticale Oz, où le mobile était situé à l'origine du mouvement et d'où il a été abandonné, sans vitesse initiale, à l'action de la pesanteur. J'appelle h la hauteur DO de ce point de départ au-dessus du sol; puis, sans changer les directions des x et des y, je mets $h - z$ à la place de z dans les équations (e) et (f); de manière que la nouvelle ordonnée z soit comptée à partir du point D et dans le sens de la pesanteur. Si l'on compte aussi l'arc s à partir de ce point et dans le même sens que z, on aura

$$ds = dz, \quad s = z, \quad v = \frac{dz}{dt},$$

en négligeant $\frac{dx^2}{dt^2}$ et $\frac{dy^2}{dt^2}$. L'équation (f) deviendra

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - c\frac{dz^2}{dt^2}; \qquad (f')$$

on pourra l'employer au lieu de l'une des trois équations (e), dont elle est une conséquence; en conservant les deux premières, on aura, en même temps,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2n\left(\frac{dy}{dt}\sin\gamma + \frac{dz}{dt}\cos\gamma\right) - c\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2n\frac{dx}{dt}\sin\gamma - c\frac{dz}{dt}\frac{dy}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (e')$$

Je multiplie l'équation (f') par $2dz$, j'intègre ses deux membres et je fais

$$\int c\frac{dz^2}{dt^2}dz = u, \quad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{1}{c}\frac{du}{dz};$$

il en résulte

$$\frac{1}{c}\,\frac{du}{dz} = 2\int g dz - 2u\,;$$

équation linéaire et du premier ordre, dont l'intégrale complète est

$$u = 2e^{-2\int c dz}\int e^{2\int c dz}\left(\int g dz\right) c dz,$$

et où l'on pourrait supposer que g et c fussent des fonctions quelconques de z : on désigne ici, et l'on continuera de représenter dans tout ce Mémoire, par e la base des logarithmes népériens.

En remettant pour u l'intégrale que cette lettre représente, et différentiant ensuite par rapport à z, il vient

$$c\,\frac{dz^2}{dt^2} = 2c\int g dz - 4ce^{-2\int c dz}\int e^{2\int c dz}\left(\int g dz\right) dz\,;$$

d'où l'on tirera une fonction de z multipliée par dz, pour la valeur de dt, puis une expression de t en fonction de z. Ainsi l'équation (f'), du second ordre, à coefficients variables et non linéaire, est néanmoins intégrable sous forme finie, quels que soient les coefficients g et c. Comme ils sont dans la question présente, des quantités constantes, on aura simplement, par les règles ordinaires,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\left(e^{t\sqrt{gc}} - e^{-t\sqrt{gc}}\right)\sqrt{g}}{\left(e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}\right)\sqrt{c}},$$

$$z = \frac{1}{c}\log\frac{1}{2}\left(e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}\right),$$

en observant qu'on doit avoir $\frac{dz}{dt} = 0$ et $z = 0$, quand $t = 0$.

Je substitue cette expression de $\frac{dz}{dt}$ dans les équations (e'), et j'y fais, en outre,

$$\frac{dx}{dt} = p,\ \frac{dy}{dt} = q.$$

Elles deviennent

$$\frac{dp}{dt} - 2nq\sin\gamma + \frac{(e^{t\sqrt{gc}} - e^{-t\sqrt{gc}})\sqrt{gc}}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}}\, p = \frac{2(e^{t\sqrt{gc}} - e^{-t\sqrt{gc}})n\sqrt{g}\cos\gamma}{(e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}})\sqrt{c}},$$

$$\frac{dq}{dt} + 2np\sin\gamma + \frac{(e^{t\sqrt{gc}} - e^{-t\sqrt{gc}})\sqrt{gc}}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}}\, q = 0.$$

D'après la théorie des équations différentielles linéaires, pour intégrer celles-ci, je fais d'abord abstraction du second membre de la première. J'en déduis alors ces deux autres équations :

$$\frac{pdp + qdq}{dt} + \frac{(e^{t\sqrt{gc}} - e^{-t\sqrt{gc}})\sqrt{gc}}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}}(p^2 + q^2) = 0,$$

$$\frac{qdp - pdq}{dt} - 2n(p^2 + q^2)\sin\gamma = 0,$$

dont les intégrales sont

$$(p^2 + q^2)(e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}})^2 = \mathrm{A},$$

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{p}{q}\right) = \mathrm{B} + 2nt\sin\gamma,$$

en désignant par A et B les deux constantes arbitraires. On en conclut

$$p = \frac{a\sin(2nt\sin\gamma) + b\cos(2nt\sin\gamma)}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}},$$

$$q = \frac{a\cos(2nt\sin\gamma) - b\sin(2nt\sin\gamma)}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}};$$

a et b étant deux autres constantes arbitraires qu'il faudra changer conformément à la théorie citée, en des variables inconnues, pour avoir égard au second membre de la première des équations données, et déterminer les valeurs complètes de p et q.

De cette manière, on aura

$$\sin(2nt\sin\gamma)\frac{da}{dt} + \cos(2nt\sin\gamma)\frac{db}{dt} = 2(e^{t\sqrt{gc}} - e^{-t\sqrt{gc}})\, n\sqrt{\frac{g}{c}}\cos\gamma,$$

$$\cos(2nt\sin\gamma)\frac{da}{dt} - \sin(2nt\sin\gamma)\frac{db}{dt} = 0;$$

d'où l'on tire

$$da = 2n\sqrt{\frac{g}{c}}\cos\gamma\,(e^{t\sqrt{gc}} - e^{-t\sqrt{gc}})\sin(2nt\sin\gamma)\,dt,$$
$$db = 2n\sqrt{\frac{g}{c}}\cos\gamma\,(e^{t\sqrt{gc}} - e^{-t\sqrt{gc}})\cos(2nt\sin\gamma)\,dt.$$

J'intègre ces différentielles, puis je substitue leurs intégrales à la place de a et b, dans les valeurs de p et q, ou des vitesses $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$. En déterminant les constantes arbitraires par la condition que ces vitesses soient nulles quand $t = 0$, il vient

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2ng\cos\gamma}{gc + 4n^2\sin\gamma}\left[1 - \frac{2\cos(2nt\sin\gamma)}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}}\right],$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{4ng\cos\gamma}{gc + 4n^2\sin\gamma}\left[\frac{\sin(2nt\sin\gamma)}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}} - \frac{(e^{t\sqrt{gc}} - e^{-t\sqrt{gc}})\,n\sin\gamma}{(e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}})\sqrt{gc}}\right];$$

d'où il résulte finalement

$$x = \frac{2ng\cos\gamma}{gc + 4n^2\sin^2\gamma}\left[t - 2\int\frac{\cos(2nt\sin\gamma)\,dt}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}}\right],$$
$$y = \frac{4ng\cos\gamma}{gc + 4n^2\sin^2\gamma}\left[\int\frac{\sin(2nt\sin\gamma)\,dt}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}} - \frac{n\sin\gamma}{gc}\log\frac{1}{2}\left(e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}\right)\right];$$

les intégrales étant prises de manière qu'elles s'évanouissent avec t, afin qu'on ait aussi $x = 0$ et $y = 0$ pour $t = 0$.

Lorsqu'à son départ du point D, le projectile aura reçu une très petite vitesse horizontale dont les composantes parallèles aux axes des x et y seront désignés par a' et b', il est aisé de voir que les quantités qu'il faudra ajouter aux valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ seront respectivement

$$\frac{2a'\cos(2nt\sin\gamma) + 2b'\sin(2nt\sin\gamma)}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}},\quad \frac{2b'\cos(2nt\sin\gamma) - 2a'\sin(2nt\sin\gamma)}{e^{t\sqrt{gc}} + e^{-t\sqrt{gc}}};$$

et, en même temps, il faudra augmenter x et y, des intégrales prises

depuis $t=0$, de ces mêmes quantités multipliées par dt. On suppose, dans la question présente, que a' et b' sont zéro.

(7). Si l'on fait abstraction de la résistance de l'air, il faudra faire $c=0$, et l'on aura

$$x = \frac{g\cos\gamma}{4n^2\sin^2\gamma}\left[2nt\sin\gamma - \sin(2nt\sin\gamma)\right],$$
$$y = \frac{g\cos\gamma}{4n^2\sin^2\gamma}\left[1 - \cos(2nt\sin\gamma) - 2n^2t^2\sin^2\gamma\right],$$
$$z = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

pour les formules relatives au mouvement dans le vide.

Quelle que soit cette résistance, ou la valeur de c, il est facile de voir que le coefficient de dt sous le signe $\int$ dans l'expression de x, est toujours au-dessous de $\frac{1}{2}$; l'intégrale est donc moindre que $\frac{1}{2}t$, et, conséquemment, la valeur de x est positive; ce qui montre que la déviation du projectile dans le sens du parallèle, se fera toujours vers l'*est* ou dans le sens du mouvement vrai de la Terre. En observant que la vitesse n de ce mouvement est une fraction moindre qu'un millième, quand on prend la seconde pour unité, de sorte que le produit nt ne peut être aussi qu'une petite fraction, dans toutes les expériences qu'il est possible de faire sur les déviations horizontales des corps qui tombent d'une hauteur considérable, on conclura, sans difficulté, de la comparaison des valeurs générales de x et y, que la deuxième doit être regardée comme insensible par rapport à la première. C'est donc aux erreurs inévitables de ce genre d'observations qu'il faut attribuer les déviations dans le sens du méridien, que quelques physiciens ont observées. Il suffira par conséquent de considérer la déviation dans le sens du parallèle, ou la valeur de x.

En négligeant le carré de nt dans l'intégrale qu'elle renferme, on aura

$$\int\frac{dt}{e^{t\sqrt{gc}}+e^{-t\sqrt{gc}}} = \frac{1}{\sqrt{gc}}\,\text{arc}\left(\text{tang} = e^{t\sqrt{gc}}\right) - \frac{\pi}{4\sqrt{gc}};$$

π désignant, à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre. Si l'on appelle θ le temps total de la chute employé par le mobile pour atteindre le sol, ou tomber de toute la hauteur DO, et que l'on désigne par δ la valeur correspondante de x, on aura donc à très peu près

$$\delta = \frac{2n\cos\gamma}{c}\left[\theta - \frac{2}{\sqrt{gc}}\,\text{arc}\left(\text{tang} = e^{\theta\sqrt{gc}}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{gc}}\right];$$

cette hauteur DO ayant été désignée par h, on aura, en même temps,

$$h = \frac{1}{c}\log\frac{1}{2}\left(e^{\theta\sqrt{gc}} + e^{-\theta\sqrt{gc}}\right);$$

et dans ces équations il faudra faire

$$n = \frac{2\pi}{86164},\quad g = (9{,}80557)(1 - 0{,}002588\,.\cos 2\gamma),$$

en prenant la seconde et le mètre pour unités de temps et de longueur. Quand les valeurs de h et de θ seront données par l'observation, la seconde de ces équations fera connaître la valeur de c relative au projectile dont on aura fait usage, et la première déterminera ensuite la déviation horizontale, que l'on pourra comparer à celle qui aura été observée.

Pour donner un exemple de cette comparaison, je choisis les expériences faites en 1833, dans les mines de Freyberg, par M. le professeur Reich. Les valeurs de h et de θ étaient

$$h = 158{,}54,\quad \theta = 6{,}06;$$

dans le lieu de l'observation, on avait

$$\gamma = 50°\,53',\quad g = 9{,}81075;$$

au moyen de ces valeurs, on trouve après quelques essais,

$$\theta\sqrt{gc} = 0{,}95,\quad \frac{1}{c} = 400{,}01,$$

de sorte que la ligne représentée par $\frac{1}{c}$ était sensiblement égale à 400 mètres; et l'on trouve ensuite

$$\delta = 0,027494;$$

ou à peu près vingt-sept millimètres et demi. M. Reich a conclu, de la moyenne de 106 observations,

$$\delta = 0,028396;$$

ce qui diffère du résultat du calcul, de moins d'un millimètre. Dans le vide, pour la valeur donnée de la hauteur h, on aurait

$$\theta = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5,685;$$

et en négligeant le cube de nt dans l'expression de x qui répond à $c = 0$, et y faisant $t = \theta$, on aurait aussi

$$\delta = \frac{1}{3} gn\theta^3 \cos\gamma = 0,027644;$$

en sorte que la résistance a augmenté le temps θ de la chute du mobile, de 0,375, ou d'un peu plus d'un tiers de seconde, et diminué la déviation δ, de 0,00015, ou de moins d'un sixième de millimètre.

(8). Je suppose maintenant que le projectile soit lancé verticalement et de bas en haut, avec une vitesse donnée que je représenterai par a.

En comptant z dans le sens de ce mouvement et à partir du point de départ O, cette ordonnée sera positive dans toute l'étendue de la trajectoire; mais la différentielle dz sera positive dans la partie ascendante de cette courbe, et négative dans sa partie descendante. Or, si l'on néglige comme plus haut les carrés $\frac{dx^2}{dz^2}$ et $\frac{dy^2}{dz^2}$, on aura $ds = \pm dz$; et la différentielle ds devant être constamment posi-

positive (n° 2), il faudra prendre $ds = dz$ dans la première partie, et $ds = -dz$ dans la seconde; au moyen de quoi, l'équation (f) aura ces deux formes différentes, savoir :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - c\frac{dz^2}{dt^2},$$

pendant que le mobile s'élèvera, et

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + c\frac{dz^2}{dt^2},$$

pendant qu'il descendra.

L'intégration de la première de ces deux équations donne

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(a\sqrt{c}\cos t\sqrt{gc} - \sqrt{g}\sin t\sqrt{gc})\sqrt{g}}{(a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc})\sqrt{c}},$$

$$z = \frac{1}{c}\log\left(a\sqrt{\frac{c}{g}}\sin t\sqrt{gc} + \cos t\sqrt{gc}\right),$$

où l'on a déterminé les deux constantes arbitraires, par les conditions $\frac{dz}{dt} = a$ et $z = 0$ quand $t = 0$. Ces expressions de $\frac{dz}{dt}$ et z en fonctions de t, auront lieu jusqu'à l'époque où l'on aura $\frac{dz}{dt} = 0$ et où le mobile cessera de s'élever; en appelant θ' le temps de son élévation, on aura donc

$$a\sqrt{c}\cos\theta'\sqrt{gc} - \sqrt{g}\sin\theta'\sqrt{gc} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\sin\theta'\sqrt{gc} = \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{a^2c+g}},\quad \cos\theta'\sqrt{gc} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a^2c+g}},$$

et par suite

$$\theta' = \frac{1}{\sqrt{gc}}\,\text{arc}\left(\text{tang} = a\sqrt{\frac{c}{g}}\right),\quad h' = \frac{1}{c}\log\sqrt{\frac{a^2c+g}{g}},$$

en désignant par h' la plus grande hauteur à laquelle le mobile parviendra.

Après le temps θ', le corps commencera à descendre, et les valeurs de $\frac{dz}{dt}$ et de z relatives à la seconde partie de son mouvement, s'obtiendront en intégrant la seconde équation différentielle du second ordre et déterminant les constantes arbitraires, par les conditions $\frac{dz}{dt} = 0$ et $z = h'$ quand $t = \theta'$; ou bien, si l'on transporte l'origine des coordonnées au point le plus haut de la trajectoire, que l'on compte les z dans le sens de la pesanteur, et le temps t à partir de l'époque où le mobile commence à descendre, les expressions de $\frac{dz}{dt}$ et de z en fonctions de t, seront celles du n° 6. Elles subsisteront jusqu'à ce que le mobile soit retombé sur le sol, ou que l'ordonnée z, ainsi comptée, soit devenue égale à h'; en appelant donc $\theta_{,}$ le temps de la chute, et $a_{,}$ la vitesse au point le plus bas, on aura

$$h' = \frac{1}{c} \log \frac{1}{2}\left(e^{\theta_{,}\sqrt{gc}} + e^{-\theta_{,}\sqrt{gc}}\right),$$

$$a_{,} = \frac{\left(e^{\theta_{,}\sqrt{gc}} - e^{-\theta_{,}\sqrt{gc}}\right)}{\left(e^{\theta_{,}\sqrt{gc}} + e^{-\theta_{,}\sqrt{gc}}\right)} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{c}};$$

à cause de la valeur précédente de h', on en conclura

$$\frac{1}{2}\left(e^{\theta_{,}\sqrt{gc}} + e^{-\theta_{,}\sqrt{gc}}\right) = \sqrt{\frac{a^2c+g}{g}};$$

et de là on déduit

$$\theta_{,} = \frac{1}{\sqrt{gc}} \log\left(\frac{\sqrt{a^2c+g} + a\sqrt{c}}{\sqrt{g}}\right),$$

$$a_{,} = \frac{a\sqrt{g}}{\sqrt{a^2c+g}}.$$

Le temps total de l'élévation et de la chute successives du projectile peut être déterminé par l'observation; en le désignant par θ, son expression sera la somme de θ' et $\theta_{,}$, en sorte que l'on aura

$$\theta\sqrt{gc} = \text{arc}\left(\text{tang} = a\sqrt{\frac{c}{g}}\right) + \log\left(\frac{\sqrt{a^2c+g} + a\sqrt{c}}{\sqrt{g}}\right); \quad (g)$$

équation que l'on pourra faire servir à la détermination de la constante c, relative au mobile dont on aura fait usage, lorsque la vitesse de projection a sera connue.

Pour donner un exemple numérique de l'application de ces diverses formules, je suppose que cette constante c et la gravité g soient les mêmes que dans le cas du numéro précédent, et que la vitesse a soit aussi celle qui élèverait le mobile à une hauteur h' égale à la hauteur h qui avait lieu dans ce même cas, de sorte qu'on ait

$$c = 0,0025, \quad g = 9,81075, \quad h' = 158,54,$$

en prenant toujours le mètre et la seconde sexagésimale pour unités de longueur et de temps. L'expression de h' en fonction de a, donnera réciproquement

$$a = \sqrt{\tfrac{g}{c}\left(e^{2ch'} - 1\right)} = 68,89;$$

on aura aussi

$$a_{,} = \sqrt{\tfrac{g}{c}\left(1 - e^{-2ch'}\right)} = 46,35;$$

le temps $\theta_{,}$ de la chute sera 6,06, comme dans le cas du numéro précédent; et quant au temps de l'élévation, on aura

$$\theta' = 5,318,$$

d'après son expression précédente en fonction de a. Dans le vide, on aurait, par les formules ordinaires,

$$a_{,} = a = 55,77, \quad \theta_{,} = \theta' = 5,685.$$

Pour une élevation à la même hauteur h', la vitesse de projection a est donc moindre dans le vide que dans l'air, ce qui devait être évidemment; mais, à raison de cette différence des vitesses, le calcul montre que c'est le temps θ' de l'ascension dans le vide qui est le plus grand.

(9). Pendant toute la durée de l'ascension du projectile, son mouvement horizontal sera déterminé par les deux premières équations (e), dans lesquelles on fera $ds = dz$, et où l'on substituera pour $\frac{dz}{dt}$, son expression en fonction de t et de a du numéro précédent. En y faisant, en outre

$$\frac{dx}{dt} = p', \quad \frac{dy}{dt} = q',$$

elles deviendront

$$\frac{dp'}{dt} - 2nq' \sin\gamma + \frac{(a\sqrt{c}\cos t\sqrt{gc} - \sqrt{g}\sin t\sqrt{gc})\sqrt{gc}}{a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc}}\, p'$$

$$= \frac{2n\sqrt{gc}\cos\gamma(\sqrt{g}\sin t\sqrt{gc} - a\sqrt{c}\cos t\sqrt{gc})}{a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc}},$$

$$\frac{dq'}{dt} + 2np' \sin\gamma + \frac{(a\sqrt{c}\cos t\sqrt{gc} - \sqrt{g}\sin t\sqrt{gc})\sqrt{gc}}{a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc}}\, q' = 0.$$

En intégrant ces deux équations simultanées de la même manière que celles du n° 6, et en remettant ensuite pour p' et q' les vitesses $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ qui doivent être nulles quand $t = 0$, on trouve

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4n^2a\sqrt{g}\sin\gamma\cos\gamma\sin(2nt\sin\gamma) + 2ng\sqrt{g}\cos\gamma\cos(2nt\sin\gamma)}{(gc - 4n^2\sin^2\gamma)(a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc})}$$

$$- \frac{2ng\cos\gamma}{gc - 4n^2\sin^2\gamma},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4n^2a\sqrt{g}\sin\gamma\cos\gamma\cos(2nt\sin\gamma) - 2ng\sqrt{g}\cos\gamma\sin(2nt\sin\gamma)}{(gc - 4n^2\sin^2\gamma)(a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc})}$$

$$- \frac{4n^2\sqrt{g}\sin\gamma\cos\gamma(a\sqrt{c}\cos t\sqrt{gc} - \sqrt{g}\sin t\sqrt{gc})}{\sqrt{c}(gc - 4n^2\sin^2\gamma)(a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc} + \sqrt{g}\cos t\sqrt{gc})},$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{4n^2a\sqrt{g}\,\mathrm{T}\sin\gamma\cos\gamma + 2ng\sqrt{g}\,\mathrm{T}'\cos\gamma - 2ngt\cos\gamma}{gc - 4n^2\sin^2\gamma},$$

$$y = \frac{4n^2a\sqrt{g}\,\mathrm{T}'\sin\gamma\cos\gamma - 2ng\sqrt{g}\,\mathrm{T}\cos\gamma}{gc - 4n^2\sin^2\gamma}$$

$$- \frac{4n^2\sin\gamma\cos\gamma}{c(gc - 4n^2\sin^2\gamma)}\log\left(a\sqrt{\frac{c}{g}}\sin t\sqrt{gc} + \cos t\sqrt{gc}\right),$$

en faisant, pour abréger,

$$\int \frac{\sin(2nt\sin\gamma)\,dt}{a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc}+\sqrt{g}\cos t\sqrt{gc}} = \mathrm{T},$$

$$\int \frac{\cos(2nt\sin\gamma)\,dt}{a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc}+\sqrt{g}\cos t\sqrt{gc}} = \mathrm{T}',$$

et supposant que ces intégrales s'évanouissent avec t, afin qu'on ait $x=o$ et $y=o$, quand $t=o$.

Si la vitesse de projection a n'est pas extrêmement grande, le produit nt ne cessera pas d'être une petite fraction, et par la comparaison des valeurs de x et de y, on s'assurera facilement que la déviation y dans le sens du méridien, sera aussi très petite et négligeable, par rapport à la déviation x dans le sens du parallèle. Quant à celle-ci, si l'on néglige le cube de n dans son expression, et si l'on y supprime, en conséquence, le terme qui contient T, on aura

$$x = \frac{2n\cos\gamma}{c}(\mathrm{T}'\sqrt{g}-t),$$

où l'on prendra

$$\mathrm{T}' = \int \frac{dt}{a\sqrt{c}\sin t\sqrt{gc}+\sqrt{g}\cos t\sqrt{gc}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\mathrm{T}'\sqrt{g} = a\int \frac{d.\cos t\sqrt{gc}}{(a^2c+g)\cos^2 t\sqrt{gc}-a^2c} - \sqrt{\frac{g}{c}}\int \frac{d.\sin t\sqrt{gc}}{(a^2c+g)\sin^2 t\sqrt{gc}-g}.$$

Ces intégrales s'obtiendront par les règles ordinaires: si on les étend depuis $t=o$ jusqu'à $t=\theta'$, et en ayant égard à la valeur de θ' du numéro précédent, on trouve, toutes réductions faites,

$$\mathrm{T}'\sqrt{g} = \frac{1}{2\sqrt{c}\,(a^2c+g)}\log\frac{\sqrt{a^2c+g}+a\sqrt{c}}{\sqrt{a^2c+g}-a\sqrt{c}},$$

et en désignant par δ' la déviation x qui répond à $t=\theta'$, ou au point

le plus haut de la trajectoire, il en résultera

$$\delta' = \frac{2n\cos\gamma}{c}\left[\frac{1}{2\sqrt{c(a^2c+g)}}\log\frac{\sqrt{a^2c+g}+a\sqrt{c}}{\sqrt{a^2c+g}-a\sqrt{c}} - \theta'\right].$$

J'appellerai D' ce point le plus élevé, et je désignerai par a' et b' les composantes parallèles aux axes des x et des y, de la vitesse horizontale dont le mobile sera animé en ce point. Leurs valeurs se déduiront de celles de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ qu'on vient de former, en y faisant $t=\theta'$; d'où il résultera

$$a' = \frac{2n\sqrt{g}\cos\gamma}{c\sqrt{a^2c+g}} - \frac{2n\cos\gamma}{c},$$
$$b' = \frac{4n^2(a-g\theta')\sin\gamma\cos\gamma}{c\sqrt{g(a^2c+g)}},$$

en négligeant toujours le cube de n. Cela étant, si l'on transporte l'origine des cordonnées en D'; que l'on compte les z dans le sens de la pesanteur, et le temps t à partir de l'époque où le mobile a atteint ce point D', les déviations horizontales du mobile, pendant toute la durée de sa chute, seront exprimées par les formules du nº 6, en ayant égard aux termes relatifs aux vitesses a' et b' indiqués à la fin de ce numéro. Au degré d'approximation où nous nous arrêtons, ces termes, dans l'expression de x, se réduiront à

$$\left(\frac{4n\sqrt{g}\cos\gamma}{c\sqrt{a^2c+g}} - \frac{4n\cos\gamma}{c}\right)\int\frac{dt}{e^{t\sqrt{gc}}+e^{-t\sqrt{gc}}};$$

l'intégrale étant prise depuis $t=0$. Dans l'expression de y, ils auront n^2 pour facteur; en sorte que la déviation dans le sens du méridien continuera d'être très petite et négligeable par rapport à la déviation dans le sens du parallèle. En représentant par δ, cette dernière déviation, comptée à partir de la verticale du point D', et qui aura lieu

quand le projectile sera retombé sur le sol, la valeur de $\delta_{,}$ se déduira de celle de δ du n° 7, en y faisant $t=\theta_{,}$, et y ajoutant la formule qu'on vient d'écrire, dans laquelle on étendra l'intégrale jusqu'à cette valeur de t. De cette manière, on aura

$$\delta_{,}=\frac{2n\cos\gamma}{c}\left[\theta_{,}+\frac{2(\sqrt{g}-2\sqrt{a^2c+g})}{\sqrt{gc}\sqrt{a^2c+g}}\left(\text{arc}\left(\text{tang}=e^{\theta_{,}\sqrt{gc}}\right)-\frac{1}{4}\pi\right)\right].$$

Le temps $\theta_{,}$ est ici celui de la chute totale du mobile, dont la valeur a été donnée dans le numéro précédent, et d'après laquelle l'expression de la déviation δ', pendant l'élévation du mobile, pourra s'écrire sous cette forme :

$$\delta'=\frac{2n\cos\gamma}{c}\left(\sqrt{\frac{g}{a^2c+g}}\,\theta_{,}-\theta'\right).$$

Maintenant, soit δ la déviation totale du projectile, comptée de son point de départ O et sur le sol, à l'*est* ou à l'*ouest* de ce point, selon que sa valeur sera positive ou négative ; nous aurons évidemment

$$\delta=\delta'+\delta_{,};$$

résultat que l'on pourra comparer à la mesure directe de cette quantité δ.

Dans le cas du vide ou de $c=0$, les équations (e) ne contiennent pas ds ; elles conviennent donc aux parties ascendante et descendante de la trajectoire; et comme elles sont linéaires et à coefficients constants, on en peut déduire les valeurs exactes de x, y, z, en fonctions de t, par les règles ordinaires. Pour plus de simplicité, si l'on néglige le carré de n, on trouvera

$$x=\left(\frac{1}{3}gt^3-at^2\right)n\cos\gamma,\quad y=0,\quad z=at-\frac{1}{2}gt^2;$$

le temps t étant compté à partir du départ du projectile, c'est-à-

dire, à partir de l'époque où $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$, sont zéro, et où l'on a $\frac{dz}{dt} = a$. Quand le mobile sera retombé sur le sol, on aura encore $z = 0$; si donc on appelle toujours θ le temps entier de son élévation et de sa chute successives, et δ sa déviation totale dans le sens du parallèle, il en résultera

$$\theta = \frac{2a}{g}, \quad \delta = -\frac{4na^3 \cos \gamma}{3g^2}.$$

Cette valeur de δ montre que la déviation aura lieu à l'*ouest* du point O, et sera proportionnelle au cube de la vitesse de projection: On la déduit aussi de la somme des valeurs de δ' et $\delta_{,}$, en développant, suivant les puissances de c, d'abord les expressions de θ' et $\theta_{,}$, ce qui donne

$$\theta' = \frac{a}{g} - \frac{a^2 c}{3g^2} + \text{etc.}, \quad \theta_{,} = \frac{a}{g} - \frac{a^2 c}{6g^2} + \text{etc.};$$

puis celles de δ' et $\delta_{,}$; et faisant ensuite $c = 0$, d'où il résulte

$$\delta' = \delta_{,} = -\frac{2na^3 \cos \gamma}{3g^2};$$

en sorte que les deux déviations successives δ' et $\delta_{,}$ sont égales, dans le même sens, et moitié de la valeur de δ qu'il s'agissait de vérifier.

Pour $c = 0$, l'expression précédente de a' se réduit à

$$a' = -\frac{na^2 \cos \gamma}{g};$$

ce qui s'accorde aussi avec celle que l'on obtient en faisant $t = \frac{a}{g}$, dans l'expression de $\frac{dx}{dt}$ relative au mouvement dans le vide.

(10) Prenons pour exemple, comme précédemment,

$$\gamma = 50°53', \ g = 9{,}81075, \ \frac{1}{c} = 400{,}01,$$
$$a = 68{,}89, \quad \theta' = 5{,}318, \ \theta_{,} = 6{,}06;$$

nombres qui supposent que le mètre et la seconde sexagésimale soient les unités de longueur et de temps, et qui répondent à une élévation h' du mobile dans l'air, égale à $158^m,54$. A cause de

$$n = \frac{2\pi}{86164},$$

on trouvera pour ses déviations

$$\delta' = -0,045502, \quad \delta_{\prime} = -0,036471, \quad \delta = -0,081973;$$

de sorte qu'elles s'observeront à l'*ouest* du point O, et que celle qui a lieu pendant l'ascension du projectile surpassera l'autre d'environ 9 millimètres. On aura, en même temps,

$$a' = 0,012043,$$

pour la vitesse horizontale du mobile au point le plus haut de la trajectoire; et c'est à raison de cette vitesse, dirigée vers l'*ouest*, que dans cet exemple, le corps retombe à l'*ouest* du pied de la verticale de ce point, et non pas à l'*est*, comme dans le n° 7. La hauteur h' restant la même, on aurait, dans le vide,

$$a = 55,774, \quad \theta = 5,6851, \quad \delta = -0,110572;$$

ce qui fait voir que la résistance de l'air a diminué la déviation totale d'environ 28 millimètres.

Pour donner un second exemple, je supposerai que le projectile soit une balle de plomb lancée verticalement par un fusil d'infanterie, et que sa vitesse de projection soit

$$a = 434.$$

Si l'expérience est faite à Paris, on aura

$$\gamma = 48^\circ 50' 14'', \quad g = 9,80896;$$

et pour plus d'exactitude, si l'on veut tenir compte de la perte de poids du mobile dans l'air, il faudra diminuer un peu cette valeur de g, et la réduire à 9,80750.

En répétant l'expérience un grand nombre de fois, et observant à chaque épreuve la durée totale de l'élévation et de la chute successives du mobile, si l'on prend la moyenne de ces durées pour le temps θ, l'équation (g) fera connaître le coefficient c de la résistance, relatif au projectile dont on aura fait usage. Pour fixer les idées, je prendrai

$$c = 0{,}004;$$

valeur qui se déduit de celle qui avait lieu dans l'expérience de M. Reich, en admettant que ce coefficient soit en raison inverse de la densité et du diamètre du projectile, et que dans cette expérience, où il avait 0,0025 pour valeur, la densité du mobile était environ les deux tiers de celle du plomb, et son diamètre à peu près deux fois et demie celui d'une balle de fusil; ce qui donne $0{,}0025 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}$, ou à peu près 0,004, pour la valeur de c relative à cette balle. Les unités de temps et de longueur sont les mêmes que dans l'exemple précédent.

Cela posé, par les formules des n°s 8 et 9, on trouvera

$$h' = 544{,}28, \quad a' = -0{,}0208, \quad a_{,} = 49{,}201,$$
$$\theta' = 7{,}3567, \quad \theta_{,} = 14{,}474,$$

pour la hauteur à laquelle le projectile parviendra, sa vitesse horizontale au point le plus haut, la vitesse verticale qu'il acquiert en retombant, les durées de son élévation et de sa chute successives, qui sont, comme on voit, très inégales. On en conclura ensuite

$$\delta' = -0{,}13404, \quad \delta_{,} = 0{,}01439, \quad \delta = -0{,}09965.$$

La déviation $\delta_{,}$, qui a lieu pendant la chute du mobile, se ferait donc à l'*est* du point O; ce qui signifie que la vitesse horizontale, acquise à l'*ouest* pendant l'élévation, ne suffirait pas, comme dans

l'exemple précédent, pour rendre la valeur de $\delta_{\prime}$ négative. Dans le vide, on aurait, pour la même vitesse de projection,

$$h' = 9601, \quad a' = -0,9217, \quad a_{\prime} = a = 434,$$
$$\theta' = \theta_{\prime} = 44,245, \quad \delta' = \delta_{\prime} = -27,186, \quad \delta = -54,372;$$

où l'on voit combien les résultats seraient différents de ceux qui ont lieu dans l'air, surtout à l'égard de la déviation δ que la résistance du fluide réduit à environ un 500e de sa valeur dans le vide.

Les auteurs qui ont écrit sur la *Balistique* ne s'accordent pas sur le coefficient c de la résistance de l'air: plusieurs même le supposent dépendant de la vitesse du mobile; ce qui revient à considérer la résistance comme n'étant pas proportionnelle au carré de cette vitesse. D'après son expression le plus généralement adoptée, et que j'ai citée dans mon *Traité de Mécanique,* on a

$$c = \frac{9\rho}{20d};$$

ρ étant le rapport de la densité de l'air à celle du projectile, et d son diamètre, exprimé en mètres. Le rapport de la densité du plomb à celle de l'eau étant 11,352, et en prenant 825 pour celui de la densité de l'eau à la densité de l'air, qui répond à la température, à la pression et au degré d'humidité ordinaires, on aura, à peu près,

$$\rho = \frac{1}{9400};$$

et si le diamètre de la balle est

$$d = 0,01635,$$

il en résultera

$$c = 0,0029275,$$

ou environ les trois-quarts de la valeur de c, dont nous venons de faire

usage. Toutes les autres données restant les mêmes, on trouve

$$\delta' = -0{,}20785, \quad \delta_{,} = -0{,}00014, \quad \delta = -0{,}2099,$$

c'est-à-dire une valeur de δ à peu près double de celle que nous avions obtenue. C'est d'après cette valeur de ρ qu'on a effectué plus haut, la diminution de valeur de g, due au poids de l'air déplacé par la balle.

(11). Considérons actuellement le cas général où le mobile est lancé du point O, suivant une direction quelconque, qui fait avec l'axe vertical Oz, un angle donné b; et désignons par a sa vitesse initiale.

Soit OA la projection horizontale de cette direction; appelons 6 l'angle AOx que fait OA avec l'axe Ox des x positives (n° 4); angle qui sera compté vers le *nord* à partir de Ox, ou à la gauche de l'observateur placé en O et tourné vers l'*est*, et qui pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à 360°. Par le point O, menons une autre droite horizontale OB, perpendiculaire à OA, et telle que l'angle BOx soit égal à $6 + 90°$. En désignant par u et v les deux coordonnées horizontales du point quelconque M de la trajectoire, rapportées à ces axes OA et OB, on aura

$$x = u \cos 6 - v \sin 6, \quad y = u \sin 6 + v \cos 6,$$

pour les valeurs de ses anciennes coordonnées x et y.

Si l'on n'avait point égard à la rotation de la Terre, ou à la fraction n, le projectile ne sortirait pas du plan vertical des axes OA et Oz; pendant toute la durée du mouvement, l'ordonnée v et la vitesse $\frac{dv}{dt}$, perpendiculaires à ce plan, seront donc des quantités de l'ordre de petitesse de n; nous négligerons, en conséquence, les carrés et le produit de $\frac{dv}{dt}$ et de n. Nous aurons alors

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{du^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2};$$

et les équations (e) deviendront

$$\frac{d^2u}{dt^2}\cos 6 - \frac{d^2v}{dt^2}\sin 6 = 2n\frac{du}{dt}\sin 6\sin\gamma - 2n\frac{dz}{dt}\cos\gamma$$
$$-c\frac{ds}{dt}\frac{du}{dt}\cos 6 + c\frac{ds}{dt}\frac{dv}{dt}\sin 6,$$
$$\frac{d^2u}{dt^2}\sin 6 + \frac{d^2v}{dt^2}\cos 6 = -2n\frac{du}{dt}\cos 6\sin\gamma - c\frac{ds}{dt}\frac{du}{dt}\sin 6 - c\frac{ds}{dt}\frac{dv}{dt}\cos 6,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2n\frac{du}{dt}\cos 6\cos\gamma - g - c\frac{ds}{dt}\frac{dz}{dt},$$

ou, plus simplement,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\frac{du}{dt} = -2n\frac{dz}{dt}\cos 6\cos\gamma,\\ \frac{d^2v}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\frac{dv}{dt} = -2n\frac{du}{dt}\sin\gamma + 2n\frac{dz}{dt}\sin 6\cos\gamma,\\ \frac{d^2z}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\frac{dz}{dt} + g = 2n\frac{du}{dt}\cos 6\cos\gamma.\end{array}\right\} \quad (h)$$

Pour déterminer les six constantes arbitraires que renfermeront les intégrales de ces trois équations, on aura, pour $t = 0$, les six conditions initiales :

$$u = 0,\ v = 0,\ z = 0,\ \frac{du}{dt} = a\cos\alpha,\ \frac{dv}{dt} = 0,\ \frac{dz}{dt} = a\sin\alpha,$$

où l'on a fait $b = 90° - \alpha$, de sorte que α soit l'angle compris entre la direction de la vitesse a et sa projection OA, qui sera positif ou négatif, selon que le mobile aura été lancé au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, mené par le point O.

(12). Si l'angle α est positif et très petit, la trajectoire s'écartera aussi très peu de la droite OA, tant que le projectile sera au-dessus de ce plan horizontal. Dans cette partie de la courbe, on pourra négliger le carré de $\frac{dz}{dt}$; et comme la différentielle du sera constamment positive, on aura alors $ds = du$.

En négligeant également le produit $n\frac{dz}{dt}$, les équations (h) se réduiront à

$$\frac{d^2u}{dt^2}+c\frac{du^2}{dt^2}=0,$$
$$\frac{d^2v}{dt^2}+c\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}=-2n\frac{du}{dt}\sin\gamma,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}+c\frac{du}{dt}\frac{dz}{dt}=-g+2n\frac{du}{dt}\cos\beta\cos\gamma;$$

ou bien, en faisant

$$\frac{du}{dt}=u',\quad \frac{dv}{dt}=v',\quad \frac{dz}{dt}=z',$$

et observant qu'on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2}=u'\frac{du'}{du},\quad \frac{d^2v}{dt^2}=u'\frac{dv'}{du},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=u'\frac{dz'}{du},$$

il en résultera

$$\frac{du'}{du}+cu'=0,$$
$$\frac{dv'}{du}+cv'=-2n\sin\gamma.$$
$$\frac{dz'}{du}+cz'=-\frac{g}{u'}+2n\cos\beta\cos\gamma.$$

En même temps, les conditions initiales qui serviront à déterminer les constantes arbitraires, dans les intégrales de ces trois équations différentielles du premier ordre, seront

$$u'=a,\quad v'=0,\quad z'=a\alpha,$$

pour $u=0$, en négligeant le carré de α.

De cette manière, on trouvera, sans difficulté,

$$u'=ae^{-cu},$$
$$v'=-\frac{2n\sin\gamma}{c}\left(1-e^{-cu}\right),$$
$$z'=a\alpha e^{-cu}-\frac{g}{2ac}\left(e^{cu}-e^{-cu}\right)+\frac{2n\cos\beta\cos\gamma}{c}\left(1-e^{-cu}\right).$$

La première de ces formules donne

$$dt = \frac{1}{a} e^{cu} du;$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{1}{ac}(e^{cu} - 1), \quad u = \frac{1}{c} \log(1 + act).$$

A cause de

$$v' = \frac{dv}{du} u', \quad z' = \frac{dz}{du} u',$$

nous aurons aussi

$$dv = -\frac{2n \sin\gamma}{ac}(e^{cu} - 1) du,$$
$$dz = \alpha du - \frac{g}{2a^2 c}(e^{2cu} - 1) du + \frac{2n \cos6 \cos\gamma}{ac}(e^{cu} - 1) du;$$

et en intégrant et déterminant les constantes arbitraires, il en résultera

$$v = -\frac{2n \sin\gamma}{ac^2}(e^{cu} - cu - 1),$$
$$z = \alpha u - \frac{g}{4a^2c^3}(e^{2cu} - 2cu - 1) + \frac{2n \cos6 \cos\gamma}{ac^2}(e^{cu} - cu - 1).$$

Ces deux dernières équations seront celles de la trajectoire à double courbure; en y joignant la valeur de u en fonction de t, elles feront connaître les trois coordonnées, ou la position du mobile à un instant quelconque.

(13). Pour en énoncer les conséquences, menons par le point O, un plan perpendiculaire à OA et un plan horizontal.

Soit ϖ la distance au premier plan, du lieu E où le projectile retombera sur le second; cette distance ϖ exprimera la *portée* horizontale; et comme ce sera la valeur de u qui répondra à $z = 0$, on aura, pour la déterminer, l'équation transcendante :

$$\alpha\varpi - \frac{g}{4a^2c^3}(e^{2c\varpi} - 2c\varpi - 1) + \frac{2n \cos6 \cos\gamma}{ac^2}(e^{c\varpi} - c\varpi - 1) = 0, \quad (i)$$

que l'on résoudra par des essais, lorsque les valeurs numériques des quantités différentes de ϖ qu'elle contient, seront données, et qui fera connaître, réciproquement, l'*angle du tir*, ou l'angle α, qui correspond à une valeur aussi donnée de ϖ.

Si cette portée et cet angle se rapportent d'abord au cas où l'on a tiré dans le plan du méridien, on aura $\mathfrak{E}=90°$ ou $\mathfrak{E}=270°$, selon que ce tir aura eu lieu vers le nord ou vers le midi; et, dans les deux cas, n disparaîtra de l'équation précédente qui se réduira à

$$a\varpi - \frac{g}{4a^2c^2}\left(e^{2c\varpi} - 2c\varpi - 1\right) = 0. \qquad (j)$$

Soit ensuite $\varpi + u$, ce que devient la portée lorsque l'on tire sous le même angle α, et avec la même vitesse a, dans un autre plan vertical; selon que la quantité u sera positive ou négative, elle exprimera l'augmentation ou la diminution de la portée, due au mouvement de la terre; et si l'on néglige son carré, ainsi que le produit nu, dans l'équation (i), on en déduira

$$u = \frac{2na\cos\mathfrak{E}\cos\gamma\left(e^{c\varpi} - c\varpi - 1\right)}{\frac{1}{2}gc\left(e^{2c\varpi} - 1\right) - \alpha a^2c^2}.$$

Soit aussi $\alpha + \varepsilon$ l'angle sous lequel il faudra tirer dans cet autre plan, pour que la portée reste égale à ϖ, de sorte que ε soit l'augmentation positive ou négative de l'angle du tir, due au mouvement de la terre; l'équation (i) donnera immédiatement

$$\varepsilon = -\frac{2n\cos\mathfrak{E}\cos\gamma}{ac^3\varpi}\left(e^{c\varpi} - c\varpi - 1\right).$$

Le point de chute E appartenant à la branche descendante de la trajectoire, la vitesse $\frac{dz}{dt}$ y sera négative; ce qui rend positif, d'après la valeur trouvée pour z', le dénominateur de l'expression de u, et cette expression, de même signe que $\cos\mathfrak{E}$, tandis que celle de ε sera de signe contraire. Il s'ensuit que si l'on tire, par exemple dans un plan vertical.

tangent au plan du parallèle, et sous le même angle α que dans le plan du méridien, la portée ϖ sera augmentée ou diminuée, selon que ce tir aura lieu vers l'*est* ou vers l'*ouest;* et pour atteindre à la même portée, il en résulte aussi qu'il faudra diminuer l'angle α, quand on tirera vers l'*est*, et l'augmenter, lorsque l'on tirera vers l'*ouest*.

L'angle α restant le même, et le tir ayant lieu dans le plan vertical qui répond à l'angle AOx égal à β, si l'on appelle ζ la valeur de l'ordonnée z correspondante à $u=\varpi$, et qu'on ait égard à l'équation (f) et à la valeur de ϵ, on en conclura

$$\zeta = \frac{2n\cos\beta\cos\gamma}{ac^2}\left(e^{c\varpi} - c\varpi - 1\right) = -\epsilon\varpi.$$

Enfin, soit λ la valeur de v qui répond à $u=\varpi$, ou la déviation horizontale du projectile, mesurée par la perpendiculaire abaissée du point E sur la droite OA; nous aurons

$$\lambda = -\frac{2n\sin\gamma}{ac^2}\left(e^{c\varpi} - c\varpi - 1\right).$$

Cette quantité étant indépendante de β, et toujours négative, cela montre que la déviation dont il s'agit tombera sur le prolongement de l'axe OB, c'est-à-dire à droite de l'axe OA, en regardant du point O vers le point E. Par conséquent, si l'on fait coïncider successivement la ligne OA, avec les quatre demi-axes des x et y, ou, autrement dit, si l'on tire successivement vers l'*est*, le *nord*, l'*ouest* et le *midi*, les déviations horizontales du projectile auront lieu respectivement, vers le *midi*, l'*est*, le *nord* et l'*ouest*, en conservant une grandeur constante.

On peut remarquer qu'il existera entre les quantités ζ et λ, ce rapport très simple :

$$\zeta = -\lambda\cos\beta\cot\gamma,$$

qui ne dépendra que de l'angle β et de la latitude γ du lieu de l'observation.

(14). Appliquons ces différents résultats au tir à la *cible*. Pour cela, supposons le centre C de la cible, placé sur la droite OA, et son plan perpendiculaire à cette droite; dans ce plan, menons par le point C, deux droites, l'une horizontale, et l'autre verticale; supposons que le soldat, qui tire du point O, vise de son mieux vers le point C, et que le fusil soit *juste*, ou n'ait, par sa construction, aucune tendance à abaisser ou élever les coups, ni à les faire dévier à droite ou à gauche. On prendra la distance donnée OC pour la valeur de α; et les quantités a et c étant aussi données, on calculera l'angle α au moyen de l'équation (j). Or, à raison du mouvement de la terre, le point C', où le centre de la balle atteindra le plan de la cible, suffisamment étendu, s'écartera du point C, et ses coordonnées rapportées aux deux lignes menées par ce dernier point, ou, plus exactement, leurs valeurs moyennes, déduites d'un très grand nombre d'épreuves, seront les quantités ζ et λ.

Cela posé, si l'on mesure à chaque épreuve, les coordonnées de C'; que l'on regarde comme positives, celles qui tombent, soit au-dessus de la ligne horizontale, soit à gauche, par rapport au soldat, de la ligne verticale, et comme négatives, celles qui tombent, soit au-dessous, soit à droite; et si l'on désigne par m et par μ, les sommes de toutes ces ordonnées verticales et de toutes ces abscisses horizontales, divisées par le nombre total des épreuves, supposé très grand, on aura, à très peu près et très probablement (*)

$$m = \zeta, \quad \mu = \lambda.$$

Quelle que soit la direction du tir, ou la grandeur de l'angle 6, la déviation moyenne μ aura lieu à la droite du soldat, et convergera vers la quantité λ, négative et indépendante de 6. Mais la moyenne m variera avec cet angle : elle sera nulle, quand on tirera dans le plan du

(*) Voyez, sur ce point, mon Mémoire sur la *Probabilité du Tir à la Cible*, inséré dans le nº IV du *Mémorial de l'Artillerie*.

méridien; elle atteindra son *maximum* dans le plan tangent à celui du parallèle, et répondra à un point C', situé au-dessus ou au-dessous de la ligne horizontale, menée par le point C, selon qu'on tirera vers l'*est* ou vers l'*ouest*. Si l'on veut que cette moyenne m soit nulle dans un plan vertical quelconque, comme dans le méridien, il faudra pour chaque angle 6, augmenter la distance AC, de la quantité x, en conservant le même angle α, ou bien augmenter cet angle, de la quantité ε, en conservant la même distance AC.

Voyons maintenant quelles peuvent être les valeurs numériques de ces déviations ζ et λ, et s'il sera nécessaire d'y avoir égard dans la pratique.

Comme dans le dernier exemple du n° 10, je prends 434 mètres par seconde, pour la vitesse de projection a, et la même valeur de c, ou, ce qui en diffère très peu, je fais $c = 0{,}003$ pour la commodité du calcul. Je prends aussi 200 mètres pour la distance OC, ou la valeur de ϖ. Au moyen de ces nombres et de la valeur de g, l'équation (j) donne

$$\alpha = 27' \, 50''.$$

On trouve, en même temps,

$$\lambda = -\,0{,}0062, \quad \zeta = (0{,}0054)\cos 6,$$

en prenant pour γ la latitude de Paris. Or, ces déviations ne sont pas assez considérables pour influer sensiblement sur la justesse du tir, ni même pour qu'on puisse les apprécier dans les moyennes de longues séries d'épreuves.

Dans le vide, on aurait

$$\alpha = \frac{g\varpi}{2a^2}, \quad \lambda = -\frac{n\varpi^2 \sin\gamma}{a};$$

et en employant les données précédentes, on en déduirait

$$\alpha = 17' \, 56'', \quad \lambda = -\,0{,}0049, \quad \zeta = (0{,}0044)\cos 6;$$

quantités moindres que leurs analogues dans l'air, de sorte que, pour une même portée et une même vitesse initiale, la résistance du fluide augmente l'angle du tir et les déviations du projectile dues au mouvement de la terre.

(15). A cause de la petitesse de la fraction n, on peut, quel que soit l'angle α, déduire des équations (h), des valeurs très approchées de x, y, z. Nous allons en donner les expressions, en nous bornant aux termes dépendants de la première puissance de cette fraction, dont on a déjà négligé le carré pour parvenir à ces équations.

En négligeant d'abord tout-à-fait la fraction n, on sera dispensé d'avoir égard à la seconde équation (h), et les deux autres se réduiront aux équations ordinaires de la *Balistique*, savoir,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + c\,\frac{ds}{dt}\frac{du}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + c\,\frac{ds}{dt}\frac{dz}{dt} + g = 0.$$

on tire de la première,

$$\frac{du}{dt} = a\cos\alpha\, e^{-cs},$$

en comptant l'arc s à partir du point de départ O, et observant qu'on a alors $\frac{du}{dt} = a\cos\alpha$ pour $s = 0$. Si l'on fait ensuite

$$\frac{dz}{dt} = p\,\frac{du}{dt},$$

la seconde des équations précédentes deviendra

$$\frac{dp}{dt}\,\frac{du}{dt} = -g;$$

et d'après la valeur de $\frac{du}{dt}$, il en résultera

$$\frac{dp}{du} = -\frac{g e^{2cs}}{a^2\cos^2\alpha}. \qquad (k)$$

On aura, en même temps,

$$p = \frac{ds}{du};$$

en sorte que p sera la tangente de l'angle que la tangente à la trajectoire, au point quelconque M et prolongée jusqu'à l'axe des u, fait avec cet axe. Au point O, on aura $p = \text{tang}\,\alpha$; dans la branche ascendante de cette courbe, p sera une quantité positive et décroissante; au point le plus haut, on aura $p = 0$; dans la branche descendante, p se changera en une quantité négative et croissante. Au point E où le mobile retombe sur la droite OA, si l'on désigne par α' l'angle aigu compris entre EO et la tangente à la trajectoire, et par ϖ la longueur de EO, on aura $p = -\text{tang}\,\alpha'$ pour $u = \varpi$: on appelle α et α', l'angle de *tir* et l'angle de *chute*, et ϖ la *portée*; dans le vide on aurait

$$\alpha' = \alpha, \quad \varpi = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

L'équation (k) ne contenant, ni le temps t, ni sa différentielle dt, est celle de la trajectoire; et comme on a

$$\sqrt{1 + p^2}\, du = ds,$$

si on la multiplie membre à membre par cette autre équation, et qu'on intègre ensuite, on aura

$$p\sqrt{1 + p^2} + \log\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = k - \frac{g e^{\frac{2s}{c}}}{ca^2 \cos^2 \alpha}; \qquad (l)$$

k étant la constante arbitraire, dont la valeur se déterminera en faisant $s = 0$ et $p = \text{tang}\,\alpha$, et sera, en conséquence,

$$k = \text{tang}\,\alpha \sqrt{1 + \text{tang}^2 \alpha} + \log\left(\text{tang}\,\alpha + \sqrt{1 + \text{tang}^2 \alpha}\right) + \frac{g}{ca^2 \cos^2 \alpha}.$$

Cette équation (l) fera connaître l'arc OM de la trajectoire, en fonc-

tion de la variable p qui se rapporte à son extrémité M. En la combinant avec les formules précédentes, et faisant, pour abréger

$$k - p\sqrt{1+p^2} - \log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = P^2,$$

on en déduira, sans difficulté,

$$du = -\frac{dp}{P^2c}, \quad dz = -\frac{p\,dp}{P^2c}, \quad dt = -\frac{dp}{P\sqrt{gc}}; \qquad (m)$$

équations qui donneront par les *quadratures*, les valeurs numériques des coordonnées de chaque point M de la trajectoire, et du temps t que le mobile emploiera pour décrire l'arc OM. On en déduit aussi

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{g(1+p^2)}}{P\sqrt{c}},$$

pour la valeur de la vitesse du mobile en ce point M, qui s'exprimera, comme on voit, sous forme finie. Au point le plus haut, par exemple, où l'on a $p = 0$, on aura

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{ck}}.$$

Le rayon de courbure au point quelconque M s'exprime également en fonction de p; en le désignant par R, on a

$$R = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}\,du}{dp},$$

et, par conséquent,

$$R = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{P^2c}.$$

Il en résulte que si l'on appelle f la force centrifuge en ce même point, on aura

$$f = \frac{1}{R}\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{g}{\sqrt{1+p^2}};$$

de sorte qu'au point le plus haut, elle est égale à la gravité, ce qui doit être, en effet, puisque ces deux forces s'y font équilibre, quelle que soit la résistance de l'air, qui leur est perpendiculaire.

Si nous faisons

$$\tang \alpha = \omega, \quad \tang \alpha' = \omega',$$

et si nous désignons par θ le temps entier du trajet du projectile, au-dessus de la droite OA, ou depuis le point O jusqu'au point E, les valeurs de ϖ et θ s'obtiendront en intégrant celles de du et dt, depuis $p = \omega$ jusqu'à $p = -\omega'$, ou, ce qui est la même chose, depuis $p = -\omega'$ jusqu'à $p = \omega$, en changeant les signes des résultats; ce qui donne

$$\varpi = \frac{1}{g}\int_{-\omega'}^{\omega} \frac{dp}{P^2}, \quad \theta = \frac{1}{\sqrt{gc}}\int_{-\omega'}^{\omega} \frac{dp}{P}.$$

Et comme au point E, on a $z = 0$, on aura, en outre, cette équation transcendante :

$$\int_{-\omega'}^{\omega} \frac{pdp}{P^2} = 0,$$

qui servira à déterminer la valeur numérique de ω', quand celles de ω et de k seront données.

Sans la résoudre, on en peut conclure que l'on aura $\omega' > \omega$, ou que l'angle de chute surpassera toujours l'angle de tir. En effet, j'écris d'abord cette équation sous la forme

$$\int_0^{\omega} \frac{pdp}{P^2} - \int_0^{-\omega'} \frac{pdp}{P^2} = 0;$$

puis je mets $-p$ et $-dp$ à la place de p et dp dans la seconde intégrale; ses limites deviennent zéro et ω'; et il en résulte

$$\int_0^{\omega} \frac{pdp}{P^2} = \int_0^{\omega'} \frac{pdp}{Q^2}, \qquad (n)$$

où l'on désigne par Q ce que P devient par le changement de signe de p,

de sorte qu'on ait

$$Q^2 = k + p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}),$$

en observant qu'on a identiquement,

$$\log(-p + \sqrt{1+p^2}) + \log(p + \sqrt{1+p^2}) = 0.$$

Or, pour une même valeur de p, cette quantité Q^2 surpasse P^2; les éléments de la seconde intégrale sont donc moindres que ceux de la première; par conséquent, pour qu'elles soient égales, il faut que les limites de la première soient moins étendues que celles de la seconde ou qu'on ait $\omega < \omega'$; ce qu'il s'agissait de prouver.

Chacune de ces deux intégrales divisée par c, exprime la plus grande hauteur à laquelle le mobile s'élève dans l'air; en sorte que l'on a

$$Z = \frac{1}{c}\int_0^{\omega} \frac{p\,dp}{P^2},$$

en désignant par Z cette hauteur *maxima*.

(16). Pour avoir égard maintenant aux seconds membres des équations (*h*), je désigne, en général, par la caractéristique δ, placée devant une inconnue quelconque, la partie de sa valeur qui dépend de n. Cela étant, il faudra substituer dans leurs premiers membres, les valeurs de $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ que l'on vient d'obtenir, augmentées de $\delta\frac{du}{dt}$ et $\delta\frac{dz}{dt}$, et y mettre $\delta\frac{dv}{dt}$ au lieu de $\frac{dv}{dt}$; mais puisqu'on doit négliger le carré de n, il suffira d'employer, dans les seconds membres, ces valeurs précédentes de $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$; et de cette manière, en multipliant ces équations par dt, nous aurons

$$d.\delta\frac{du}{dt}+cds.\delta\frac{du}{dt}=\frac{2npdp}{cP^2}\cos 6\cos\gamma,$$
$$d.\delta\frac{dv}{dt}+cds.\delta\frac{dv}{dt}=\frac{2ndp}{cP^2}\sin\gamma-\frac{2npdp}{cP^2}\sin 6\cos\gamma,$$
$$d.\delta\frac{dz}{dt}+cds.\delta\frac{dz}{dt}=-\frac{2ndp}{cP^2}\cos 6\cos\gamma.$$

On simplifiera ces équations, en faisant

$$\delta\frac{du}{dt}=u_i e^{-ct},\quad \delta\frac{dv}{dt}=v_i e^{-ct},\quad \delta\frac{dz}{dt}=z_i e^{-ct}.$$

En les multipliant ensuite par e^{ct}, et ayant égard à l'équation (l) de laquelle on tire

$$e^{ct}=\frac{a\sqrt{c}\cos\alpha}{\sqrt{g}}\,\mathrm{P},$$

elles deviendront

$$du_i=\frac{2napdp}{\mathrm{P}\sqrt{gc}}\cos\alpha\cos 6\cos\gamma,$$
$$dv_i=\frac{2nadp}{\mathrm{P}\sqrt{gc}}\cos\alpha\sin\gamma-\frac{2napdp}{\mathrm{P}\sqrt{gc}}\cos\alpha\sin 6\cos\gamma,$$
$$dz_i=-\frac{2nadp}{\mathrm{P}\sqrt{gc}}\cos\alpha\cos 6\cos\gamma.$$

De ces formules, jointes aux précédentes, on conclura

$$\delta\frac{du}{dt}=\frac{2n\cos 6\cos\gamma}{c\mathrm{P}}\int\frac{pdp}{\mathrm{P}},$$
$$\delta\frac{dy}{dt}=\frac{2n\sin\gamma}{c\mathrm{P}}\int\frac{dp}{\mathrm{P}}-\frac{2n\sin 6\cos\gamma}{c\mathrm{P}}\int\frac{pdp}{\mathrm{P}},$$
$$\delta\frac{dz}{dt}=-\frac{2n\cos 6\cos\gamma}{c\mathrm{P}}\int\frac{dp}{\mathrm{P}};$$

les intégrales étant prises de manière qu'elles s'évanouissent à l'origine du mouvement, ou quand $p=\omega$, attendu que les valeurs de $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ du numéro précédent, et $\frac{dv}{dt}=\delta\frac{dv}{dt}=0$, satisfont déjà aux conditions

de la vitesse initiale. Quant à l'accroissement de la vitesse même, il se déduira de ceux de ses composantes en observant que d'après l'expression de $\frac{ds^2}{dt^2}$ du n° 11, on a

$$\delta \frac{ds}{dt} = \frac{du}{ds}\,\delta \frac{du}{dt} + \frac{dz}{ds}\,\delta \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left(\delta \frac{du}{dt} + p\,\delta \frac{dz}{dt}\right);$$

d'où l'on conclut

$$\delta \frac{ds}{dt} = \frac{2n \cos \mathsf{C} \cos \gamma}{c\mathrm{P}\sqrt{1+p^2}}\left(\int \frac{p\,dp}{\mathrm{P}} - p \int \frac{dp}{\mathrm{P}}\right).$$

En intervertissant l'ordre des caractéristiques d et δ, on a

$$\delta \frac{du}{dt} = \frac{d\delta u}{dt}, \quad \delta \frac{dv}{dt} = \frac{d\delta v}{dt}, \quad \delta \frac{dz}{dt} = \frac{d\delta z}{dt}.$$

Si donc on multiplie les équations précédentes par dt; que l'on y mette pour cette différentielle, la troisième formule (m); et que l'on intègre ensuite, on aura

$$\delta u = -\frac{2n \cos \mathsf{C} \cos \gamma}{c\sqrt{gc}} \int \left(\frac{dp}{\mathrm{P}^3} \int \frac{p\,dp}{\mathrm{P}}\right),$$
$$\delta v = -\frac{2n \sin \gamma}{c\sqrt{gc}} \int \left(\frac{dp}{\mathrm{P}^3} \int \frac{dp}{\mathrm{P}}\right) + \frac{2n \sin \mathsf{C} \cos \gamma}{c\sqrt{gc}} \int \left(\frac{dp}{\mathrm{P}^3} \int \frac{p\,dp}{\mathrm{P}}\right),$$
$$\delta z = \frac{2n \cos \mathsf{C} \cos \gamma}{c\sqrt{gc}} \int \left(\frac{dp}{\mathrm{P}^3} \int \frac{dp}{\mathrm{P}}\right);$$

les secondes intégrales s'évanouissant aussi quand $p = \omega$.

De ces trois formules, on déduit cette équation

$$\sin \mathsf{C} \cos \gamma\, \delta u + \cos \mathsf{C} \cos \gamma\, \delta v + \cos \gamma\, \delta z = 0,$$

indépendante de n, et qui fait voir qu'au degré d'approximation où nous arrêtons, la rotation de la terre n'augmente ni ne diminue la

distance du projectile, pendant toute la durée de son mouvement, au plan du parallèle passant par le point O.

(17). Dans chacune de ces mêmes formules, les deux intégrales successives peuvent être considérées comme des intégrales définies, prises depuis ω jusqu'à p, ou, si l'on veut, depuis p jusqu'à ω, afin de rendre la variable p croissante et sa différentielle positive dans toute l'étendue des intégrations.

Si l'on étend ensuite la seconde intégrale depuis $p = -\omega'$ jusqu'à $p = \omega$ dans la première formule, et seulement depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \omega$ dans la troisième, on aura les accroissements de la portée et de la hauteur *maxima* dus au mouvement de la terre, savoir :

$$\delta\varpi = -\frac{2n\cos\mathcal{C}\cos\gamma}{c\sqrt{gc}}\int_{-\omega'}^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_{p}^{\omega}\frac{pdp}{P}\right),$$
$$\delta Z = \frac{2n\cos\mathcal{C}\cos\gamma}{c\sqrt{gc}}\int_{0}^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_{p}^{\omega}\frac{dp}{P}\right);$$

quantités qui s'évanouiront l'une et l'autre dans le plan du méridien où l'on a $\cos\mathcal{C} = 0$.

De même, si nous faisons, pour abréger,

$$V = -\frac{2n\sin\gamma}{c\sqrt{gc}}\int_{-\omega'}^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_{p}^{\omega}\frac{dp}{P}\right),$$
$$V' = \frac{2n\cos\gamma}{c\sqrt{gc}}\int_{-\omega'}^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_{p}^{\omega}\frac{pdp}{P}\right);$$

si, de plus, nous désignons par Δ la déviation totale du projectile, d'un côté ou de l'autre de OA, c'est-à-dire la distance du point E où il retombera sur le plan horizontal mené par le point O, à cette ligne OA, nous aurons

$$\Delta = V + V'\sin.\mathcal{C};$$

et cette déviation s'observera à la gauche ou à la droite de l'observateur

placé en O, et tourné vers OA, selon que sa valeur sera positive ou négative. Le premier terme V exprimera cette valeur, quand le tir aura lieu dans la direction du parallèle; et cette quantité, d'après son expression, étant toujours négative dans notre hémisphère où la latitude γ est positive, il s'ensuit que la déviation s'observera alors vers le *midi* ou vers le *nord*, selon que l'on tirera vers l'*est* ou vers l'*ouest*: ce sera le contraire, comme cela doit être, dans l'autre hémisphère. Le second terme $V' \sin 6$ exprimera l'excès, positif ou négatif, de la déviation, lorsque l'on tirera dans un autre plan, sur la déviation relative au plan vertical tangent au parallèle.

Au point E, l'angle de chute $\omega' + \delta\omega'$ devra être tel que l'on ait $z + \delta z = 0$; par conséquent, si l'on met $\omega' + \delta\omega'$ au lieu de ω dans l'expression de z, et que l'on étende, dans celle de δz, la seconde intégrale depuis $p = -\omega'$ jusqu'à $p = \omega$, on aura

$$\frac{1}{c}\int_{-\omega'-\delta\omega'}^{\omega} \frac{pdp}{P^3} + \frac{2n \cos 6 \cos \gamma}{c\sqrt{gc}} \int_{-\omega'}^{\omega} \left(\frac{dp}{P^3}\int_p^{\omega} \frac{dp}{P}\right) = 0;$$

en négligeant le carré de $\delta\omega'$, et désignant par P' ce que P devient quand on y fait $p = -\omega'$, on a, d'ailleurs,

$$\int_{-\omega'-\delta\omega'}^{\omega} \frac{pdp}{P^3} = \int_{-\omega'}^{\omega} \frac{pdp}{P^3} - \frac{\omega'\delta\omega'}{P'^3};$$

et comme cette dernière intégrale est rendue nulle par la valeur de ω', il en résultera

$$\delta\omega' = \frac{2n \cos 6 \cos \gamma}{\omega' \sqrt{gc}} P'^3 \int_{-\omega'}^{\omega} \left(\frac{dp}{P^3}\int_p^{\omega} \frac{dp}{P}\right),$$

pour la partie de l'angle de chute, due au mouvement de la terre.

Enfin, si l'on met $\omega' + \delta\omega'$ à la place de ω', dans l'expression de θ, et que l'on néglige le carré de $\delta\omega'$, on en conclura

$$\delta\theta = \frac{\delta\omega'}{P' \sqrt{gc}},$$

pour la valeur de $\delta\theta$ correspondante à celle de $\delta\omega'$. En comparant ces valeurs à l'expression de V, on aura aussi

$$\delta\theta = -\frac{VP'\sqrt{c}\cos\varepsilon}{\omega'\sqrt{g}\,\mathrm{tang}\,\gamma}.$$

Ce sera l'accroissement positif ou négatif du temps que le mobile emploiera à aller du point O au point E.

18. L'application de la méthode des *quadratures* aux intégrales doubles que ces diverses formules contiennent, exigerait des calculs très pénibles; mais on y suppléera par les considérations suivantes qui nous conduiront à des valeurs numériques assez approchées pour qu'on puisse juger de l'influence du mouvement de la Terre sur celui du projectile.

La plus petite et la plus grande valeur de P répondent à $p = \omega$ et à $p = \omega'$, et sont $\sqrt{\frac{g(1+\omega^2)}{a^2c}}$ et P'; quelle que soit la variable p, on aura donc

$$\int_p^{\omega} \frac{dp}{P} > \sqrt{\frac{g(1+\omega^2)}{a^2c}} \int_p^{\omega} \frac{dp}{P^2}, \quad \int_p^{\omega} \frac{dp}{P} < P' \int_p^{\omega} \frac{dp}{P^2};$$

on a d'ailleurs

$$\frac{dp}{P^2}\int_p^{\omega} \frac{dp}{P^2} = -\frac{1}{2}\,d\,.\left(\int_p^{\omega}\frac{dp}{P^2}\right)^2,$$

et par conséquent

$$\int_{-\omega'}^{\omega} \left(\frac{dp}{P^2}\int_p^{\omega} \frac{dp}{P^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\omega'}^{\omega}\frac{dp}{P^2}\right)^2 = \frac{1}{2}c^2\varpi^2;$$

d'où il résultera, abstraction faite du signe,

$$V > \frac{n\varpi^2\sin\gamma}{a\cos\omega}, \quad V < \frac{nP'\varpi^2\sqrt{c}\sin\gamma}{\sqrt{g}}.$$

En ayant égard à l'expression de θ, on trouvera pareillement

$$V > \frac{n\theta^2 \sqrt{g \sin\gamma}}{P' \sqrt{c}}, \quad V < n\theta^2 a \cos\alpha \sin\gamma.$$

Pour des valeurs données de a et α, les *tables du tir* feront connaître les valeurs de θ et ϖ qui entrent dans ces limites de V, ainsi que l'angle *de chute* α' et sa tangente ω', d'où l'on déduira la valeur de P', au moyen de l'équation

$$P'^2 = \frac{g(1+\omega^2)}{a^2 c} + \omega\sqrt{1+\omega^2} + \log(\omega + \sqrt{1+\omega^2})$$
$$+ \omega'\sqrt{1+\omega'^2} + \log(\omega' + \sqrt{1+\omega'^2}).$$

Je prendrai pour exemple le tir de la *bombe*, tel qu'il a lieu dans les exercices des *Polygones*. Le poids et le diamètre du projectile étant 51 kilogrammes et 27 centimètres, on trouve à peu près 2500 mètres pour la valeur de $\frac{1}{c}$ calculée par la formule du n° 10, et rapportée à l'état ordinaire de l'air. Sous l'angle de tir de 45°, la vitesse correspondante à une portée d'environ 1200 mètres, est évaluée par Lombard à un peu moins de 120 mètres, de sorte qu'en prenant toujours le mètre et la seconde pour unités de longueur et de temps, nous ferons

$$\omega = 1, \quad a = 119{,}54 \qquad c = 0{,}0004.$$

En employant aussi l'angle de chute, la portée et le temps du trajet, calculés par le même auteur (*), nous aurons, en même temps,

$$\alpha' = 50°8', \quad \varpi = 1182, \quad \theta = 16{,}25.$$

Au moyen de ces données jointes à celles-ci :

$$g = 9{,}8075, \quad \gamma = 48°50'14'', \quad n = \frac{2\pi}{86164},$$

(*) *Traité du Mouvement des Projectiles*, p. 231.

on trouve d'abord

$$P' = 2,9343;$$

et l'on obtient ensuite

$$V > 0,9094, \quad V < 1,4374,$$

pour les limites de V qui dépendent de ϖ; puis

$$V > 0,7736, \quad V < 1,2253,$$

pour celles qui se déduisent de θ.

On conclut de l'un ou l'autre de ces deux couples de limites, que quand on tire vers l'*est* ou vers l'*ouest*, sous l'angle de 45 degrés, et à une distance du but d'environ 1200 mètres, la déviation à droite, due au mouvement de la terre, doit être à peu près égale à un mètre; en sorte que pour atteindre le but, il faudrait viser à gauche dans un plan qui ferait avec celui du vertical tangent au parallèle, un angle d'à peu près trois minutes, dont l'arc répond à un 1200e du rayon.

Si l'on fait $V = -1$, dans l'expression de $\delta\theta$, on en déduira

$$\delta\theta = (0,01368) \cos 6;$$

c'est-à-dire que le mouvement de la terre n'influe pas sensiblement sur la longueur du temps θ.

(19). Les élémens de l'intégrale double que renferme l'expression de V' n'ayant pas le même signe dans toute l'étendue des intégrations, on ne peut pas en déterminer des limites, comme nous venons de le faire pour l'intégrale contenue dans V. Mais dans l'exemple que nous avons choisi, on a

$$k = 5,7271;$$

et pour cette valeur de k, celle de V' peut être réduite en série conver-

gente, ordonnée suivant les puissances descendantes de k, dont il suffira, dans la question qui nous occupe, de conserver les deux premiers termes.

En faisant, pour abréger,

$$p\sqrt{1+p^2} + \log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = q, \quad P^2 = k - q,$$

on aura, de cette manière,

$$\int_p^\omega \frac{pdp}{P} = \frac{1}{\sqrt{k}}\int_p^\omega pdp + \frac{1}{2k\sqrt{k}}\int_p^\omega qpdp;$$

mais on a identiquement

$$dq = 2\sqrt{1+p^2}\,dp;$$

en faisant aussi pour abréger,

$$\omega\sqrt{1+\omega^2} + \log\left(\omega+\sqrt{1+\omega^2}\right) = h,$$

et intégrant par partie, on aura

$$\int_p^\omega qpdp = \tfrac{1}{2}h\omega^2 - \tfrac{1}{2}qp^2 - \int_p^\omega p^2\sqrt{1+p^2}\,dp;$$

donc, à cause de

$$\int_p^\omega pdp = \tfrac{1}{2}(\omega^2 - p^2),$$

$$\int^\omega p^2\sqrt{1+p^2}\,dp = \tfrac{1}{4}\omega(1+\omega^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{4}p(1+p^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{8}h + \tfrac{1}{8}q,$$

il en résultera

$$\int_p^\omega \frac{pdp}{P} = \frac{1}{2\sqrt{k}}(\omega^2 - p^2) + \frac{h\omega^2 - qp^2}{4k\sqrt{k}} - \frac{\omega(1+\omega^2)^{\frac{3}{2}} - p(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{8k\sqrt{k}} + \frac{h-q}{16k\sqrt{k}}.$$

Nous aurons ensuite

$$\int_{-\omega'}^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_p^{\omega}\frac{pdp}{P}\right)=\frac{1}{2k\sqrt{k}}\int_{-\omega'}^{\omega}(\omega^2-p^2)\,dp+\frac{1}{2k^2\sqrt{k}}\int_{-\omega'}^{\omega}(\omega^2-p^2)\,qdp$$

$$-\frac{1}{4k^2\sqrt{k}}\int_{-\omega'}^{\omega}\left[qp^2-\tfrac{1}{2}p(1+p^2)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{4}q\right]dp+\frac{\left[h\omega^2-\frac{1}{2}\omega(1+\omega^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}h\right](\omega+\omega')}{4k^2\sqrt{k}}.$$

La valeur de ω', déduite de l'équation (n), ne différera de ω que d'une quantité de l'ordre de petitesse de $\frac{1}{k}$; au degré d'approximation où nous nous arrêtons, on pourra donc faire $\omega'=\omega$ dans les termes de cette équation qui ont $k^2\sqrt{k}$ pour diviseur ; les deux dernières intégrales que son second membre renferme, se réduiront alors à zéro, comme étant composées d'éléments qui sont deux à deux égaux et de signes contraires ; et quant à la première, on aura

$$\int_{-\omega'}^{\omega}(\omega^2-p^2)=dp\int_{-\omega}^{\omega}(\omega^2-p^2)\,dp+\int_{-\omega'}^{-\omega}(\omega^2-p^2)\,dp,$$

ou simplement

$$\int_{-\omega'}^{\omega}(\omega^2-p^2)\,dp=\tfrac{4}{3}\omega^3,$$

en observant que l'intégrale $\int_{-\omega'}^{-\omega}(\omega^2-p^2)\,dp$ se réduit aussi à zéro, lorsque l'on néglige le carré de $\omega'-\omega$. On aura donc

$$\int_{-\omega'}^{\omega}\left(\frac{dp}{P^2}\int_p^{\omega}\frac{pdp}{P}\right)=\frac{2\omega^3}{3k\sqrt{k}}+\frac{\left[h\omega^2-\frac{1}{2}\omega(1+\omega^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}h\right]}{2k^2\sqrt{k}},$$

pour la valeur approchée de l'intégrale double.

Dans le cas de $\alpha=45^\circ$ et $\omega=1$, on aura

$$h=\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})=2{,}2956,$$

parce qu'il s'agit d'un logarithme népérien que l'on doit multiplier par 2,3026 pour le convertir en logarithme ordinaire. En faisant

9

usage, en outre, de la valeur de k citée plus haut, on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{dp}{P^3}\int_{p}^{\infty}\frac{p\,dp}{P}\right)=0,05791.$$

Au moyen de cette valeur et de celles de n, γ, c, g, du numéro précédent, on trouvera

$$V'=0,2219;$$

ce qui montre que la déviation Δ ne varie pas beaucoup, lorsque le tir a lieu successivement dans différents plans verticaux. On aura, en même temps,

$$\delta x=-(0,2219)\cos\beta;$$

en sorte que l'influence du mouvement de la terre sur la longueur de la portée, ne sera que d'à peu près un double décimètre dans son maximum.

(20). En général, lorsqu'il s'agit d'un projectile dont le poids et le diamètre sont considérables, et que l'angle du tir n'est pas très petit, ni la vitesse de projection très grande, la constante k est très grande, et le mouvement diffère peu de celui qui aurait lieu dans le vide; c'est pourquoi, il ne sera pas inutile de considérer le cas où la résistance de l'air serait tout-à-fait nulle.

Faisons donc $c=0$, dans les équations (h); elles se changeront en des équations linéaires et à coefficients constants que l'on pourrait intégrer sous forme finie, par la méthode ordinaire; mais en continuant de négliger, comme dans le n° 11, le carré de n, les valeurs approchées de u, v, z, qui y satisferont, et qui rempliront les conditions initiales du mouvement, seront

$$u = ta\cos\alpha - nt^2\left(a\sin\alpha - \tfrac{1}{3}gt\right)\cos\beta\cos\gamma,$$

$$v = -nat^2\cos\alpha\sin\gamma + nt^2\left(a\sin\alpha - \tfrac{1}{3}gt\right)\sin\beta\cos\gamma,$$

$$z = ta\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 + nt^2 a\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

On aura, en même temps,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = a^2 - 2gta \sin \alpha + g^2 t^2,$$

pour le carré de la vitesse à un instant quelconque, qui ne dépendra pas de n, au degré d'approximation où nous nous arrêtons.

En conservant toutes les notations précédentes, on aura d'abord

$$\theta = \frac{2a \sin \alpha}{g}, \quad \varpi = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{g},$$

abstraction faite de n, et ensuite, en y ayant égard,

$$\delta\theta = \frac{2na^3}{g^2} \sin 2\alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

$$\delta\varpi = \frac{4na^3}{g^3} \sin \alpha \cos^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma - \frac{4na^3}{3g^3} \sin^3 \alpha \cos \beta \cos \gamma;$$

et si l'on observe que la déviation désignée par Δ, n'est autre chose que la valeur de v qui répond à $z = 0$, on aura aussi

$$\Delta = -\frac{4na^3}{g^3} \sin^2 \alpha \cos \alpha \sin \gamma + \frac{8na^3}{3g^3} \sin^3 \alpha \sin \beta \cos \gamma.$$

Dans l'exemple du n° 18, où l'angle du tir était de 45°, et la vitesse d'à peu près 120 mètres, on trouvera

$$\theta = 17{,}237, \quad \varpi = 1457,$$

en prenant la seconde et le mètre pour unités; et si l'on compare ces valeurs à celles que Lombard a calculées, on voit que la résistance de l'air avait diminué le temps du trajet, d'un peu plus d'une seconde, et la portée, d'à peu près le cinquième de sa grandeur dans le vide.

On aurait, en outre,

$$\delta\theta = (0{,}01426) \cos \beta,$$
$$\delta\varpi = (0{,}8036) \cos \beta,$$
$$\Delta = -1{,}3788 + (0{,}8036) \sin \beta;$$

en sorte que dans le vide comme dans l'air, ce serait par la déviation horizontale du projectile, que l'influence du mouvement de la terre se manifesterait principalement.

Pour $c=0$, on a $P'=\infty$; ce qui rend les deux limites de V qui dépendent de P', égales à zéro et l'infini, et par conséquent illusoires. Celles qui sont indépendantes de c, conviennent également au cas du mouvement dans l'air et à celui du mouvement dans le vide. En y substituant les valeurs de ϖ et de θ qui conviennent à ce dernier cas, ces deux limites deviennent égales entre elles, et au premier terme de la valeur précédente de Δ, abstraction faite du signe.

Fautes à corriger dans le présent Mémoire.

Page 1re, ligne 4, *au lieu de* 14 novembre, *lisez* 13 novembre
2, 21, *au lieu de* neuf quarantièmes, *lisez* neuf vingtièmes
7, 4, en remontant, *au lieu de* un et trois, *lisez* un et deux.

MÉMOIRE

Sur le mouvement des Projectiles dans l'air, en ayant égard à leur rotation ;

Lu à l'Académie des Sciences, le 5 mars 1838.

Pour déterminer le mouvement d'un corps solide entièrement libre, on le décompose en deux autres, l'un de translation pour lequel on prend le mouvement du centre de gravité, l'autre de rotation autour de ce point, c'est-à-dire, autour d'un axe passant par ce point, qui change de direction à chaque instant, soit dans l'intérieur du mobile, soit dans l'espace, et qu'on appelle pour cette raison, *l'axe instantané de rotation*.

Les inconnues du problème sont alors les trois coordonnées du centre de gravité, et trois certains angles qui déterminent, sans aucune ambiguité et de la manière la plus simple, la situation du mobile relativement à ce centre, d'après les directions de ses trois *axes principaux* passant par ce même point. Ces trois angles et leurs différentielles par rapport au temps, déterminent aussi la direction de l'axe instantané, et la grandeur de la vitesse de rotation. Quand on a obtenu les expressions des six inconnues en fonctions du temps, le problème est complétement résolu ; on en déduit ensuite, si l'on veut et sans difficulté, les coordonnées d'un point déterminé de la masse ou de la surface du mobile, les composantes de sa vitesse, les équations de la courbe qu'il décrit dans l'espace.

Les trois équations différentielles secondes du mouvement de translation se déduisent immédiatement du principe que le centre de

gravité se meut à chaque instant, comme si toutes les forces appliquées au mobile y étaient transportées parallèlement à leurs directions, et que la masse entière de ce corps y fût concentrée. En même temps le corps tourne autour de ce point, comme s'il était fixe, et que les forces données, sans addition d'aucune autre, eussent conservé leurs points d'application; mais la formation des équations différentielles du mouvement de rotation, a présenté autrefois beaucoup plus de difficulté. D'Alembert les a données le premier en 1749; Euler a ensuite obtenu six équations différentielles du premier ordre, entre les trois inconnues angulaires et les trois composantes de la vitesse de rotation, et desquelles les trois équations de d'Alembert, résultent par l'élimination de ces trois composantes; Lagrange, dans les Mémoires de Berlin et dans la *Mécanique analytique*, a déduit ces mêmes équations d'une analyse remarquable par la symétrie des formules qui résulte de l'emploi de neuf quantités, introduites par la transformation des coordonnées rectangulaires, fonctions connues des trois angles cités plus haut, et liées entre elles par l'un ou l'autre de deux systèmes de six équations données; enfin, dans mon *Traité de Mécanique*, je suis parvenu, de la manière que je crois la plus simple, aux équations différentielles du mouvement de rotation, sous la forme où Euler les a présentées, et qu'on leur a toujours conservée. En effet, trois de ces six équations sont indépendantes des forces qui agissent sur le mobile; leur formation est une simple question de Géométrie, et ce n'est que la formation des trois autres, qui soit réellement un problème de mécanique. Or, j'en ai fait dépendre la solution, de ce théorème facile à démontrer: la somme des moments pris par rapport à un axe principal, passant ou non par le centre de gravité, des quantités de mouvement dont tous les points du mobile sont animés à un instant quelconque, est égale au produit de la vitesse angulaire de rotation de ce corps autour de ce même axe, et de son moment d'inertie par rapport à cette droite. Si l'axe demeurait parallèle à lui-même pendant la durée de l'instant suivant, on formerait immédiatement l'équation du mouvement de rotation

qui s'y rapporte, en égalant la différentielle de ce produit à l'accroissement de cette somme de moments pendant cet instant, et remplaçant cet accroissement inconnu par une autre quantité qui lui fût équivalente d'après le principe général de l'équilibre des quantités de mouvement perdues; laquelle quantité, quand l'axe principal passe par le centre de gravité, est l'élément du temps multiplié par la somme des moments, par rapport à cette droite, des forces motrices données, qui sont appliquées au mobile et qui produisent seules, comme on vient de le dire, la rotation autour de ce point. Mais cet axe, fixe dans l'intérieur du mobile, changeant continuellement de direction dans l'espace, cette variation, pendant un instant infiniment petit, introduit dans le premier membre de l'équation différentielle, un terme qui la complète et que l'on détermine facilement. Au lieu d'un corps solide, s'il s'agissait d'un système de forme variable, les raisonnements que nous rappelons subsisteraient également; mais le moment d'inertie relatif à l'axe principal, varierait pendant l'instant que l'on considère, et il en résulterait encore un autre terme dans le premier membre de l'équation différentielle. Par cette considération que je me borne maintenant à indiquer, on formera pour un système quelconque de points matériels, des équations analogues à celles du mouvement de rotation d'un corps solide, que l'on combinera comme celles-ci, avec les équations du mouvement du centre de gravité, et qui s'appliqueront, par exemple, au mouvement de la Terre, en ayant égard à la fluidité d'une partie de sa masse.

Dans l'état actuel de la science, les équations différentielles des mouvements simultanés de translation et de rotation d'un corps entièrement libre, ne laissent donc rien à désirer, quant à leur formation, sous le double rapport de la généralité et de la simplicité. Mais il n'en est pas de même en ce qui concerne leur intégration et la solution des problèmes qui en dépendent. Lorsque la résultante de toutes les forces motrices qui agissent sur le mobile, passe constamment par son centre de gravité, le mouvement de rotation autour de ce point est le même que si ces forces n'existaient pas, et que le corps,

mis d'abord en mouvement par une ou plusieurs impulsions, eût ensuite été abandonné à lui-même. Dans ce cas on parvient à intégrer sous forme finie, les équations différentielles de ce mouvement, au moyen de deux fonctions elliptiques d'espèces différentes. Dans les autres cas, les deux mouvements simultanés influent mutuellement l'un sur l'autre; chacune de leurs six équations différentielles secondes renferme à la fois les trois inconnues angulaires et les trois coordonnées du centre de gravité; et ce système d'équations ne peut plus s'intégrer que par les méthodes d'approximation. C'est de cette manière que d'Alembert a résolu le problème de la *précession des équinoxes*, et déterminé les lois véritables de l'inégalité de ce mouvement, qu'on appelle la *nutation*. Le problème de la *libration* de la Lune, analogue à celui de la précession, présentait des difficultés spéciales que Lagrange a surmontées dans un de ses plus beaux ouvrages, au moyen d'une transformation des inconnues, qui a rendu linéaires et à coefficients constants, les équations de la libration vraie en latitude, et qui lui a permis d'en déduire les lois remarquables de ce mouvement, découvertes autrefois par Dominique Cassini. J'ai appliqué cette même transformation à un cas de la précession des équinoxes où la rotation du sphéroïde serait nulle ou très lente; ce qui n'est pas le cas de la nature, et ne présente plus alors qu'un exemple curieux du mouvement d'un corps solide. Le changement des inconnues rend encore linéaires les équations différentielles du mouvement; mais leurs coefficients n'étant plus constants, elles ne peuvent plus s'intégrer par la méthode générale, et ce n'est qu'à raison d'une circonstance très particulière, qu'elles sont néanmoins intégrables sous forme finie, ainsi que je l'ai trouvé dans un précédent Mémoire (*). Dans celui-ci, je me propose d'appliquer les équations différentielles du double mouvement d'un corps solide, à des exemples qui n'avaient pas encore été considérés; et quoique ces nouvelles questions soient principalement relatives aux projectiles de l'artillerie,

(*) Tome XIV des *Mémoires de l'Académie*.

je crois pouvoir espérer que leur solution intéressera les géomètres, sous le rapport du calcul intégral et sous celui de la mécanique générale.

Lorsqu'un corps parfaitement sphérique et homogène, est lancé sans aucune rotation initiale, dans un air calme, son centre de figure ne sort pas du plan vertical de sa projection, abstraction faite, toutefois, de la petite déviation due au mouvement de la terre et que j'ai considérée dans un autre Mémoire. Tout, en effet, est semblable alors de part et d'autre de ce plan; mais dans la pratique de l'artillerie, le concours des circonstances qui produit cette similitude n'a jamais lieu, et il en résulte des écarts considérables du projectile, à droite ou à gauche du plan de projection, qui nuisent à la justesse du tir et n'ont pas manqué d'être observés.

Robins, à qui l'on doit l'invention du pendule balistique, attribue ces écarts, dans ses *Principes d'artillerie,* qu'Euler et Lombard ont commentés, à la rotation du projectile qui accompagne, en général, son mouvement de translation. Euler pense, au contraire, que la rotation ne doit avoir aucune influence sensible sur ce mouvement, non plus que la non-sphéricité parfaite du projectile, et que les déviations observées sont dues uniquement à ce que, par un défaut d'homogénéité de ce corps, le centre de gravité ne coïncide pas exactement avec le centre de figure. Lombard, professeur dont le nom s'est conservé dans les écoles d'artillerie, partage l'opinion de Robins sur l'influence de la rotation, sans se prononcer positivement en ce qui concerne les influences, plus ou moins grandes, de la non-sphéricité et de la non-homogénéité. Ces deux circonstances, et la rotation en tant qu'elle donne lieu à un frottement du mobile contre l'air qu'il traverse, sont effectivement les diverses causes qui concourent, indépendamment des agitations de l'air, à produire les déviations horizontales du centre de gravité, et à modifier son mouvement projeté sur le plan vertical dans lequel il a été lancé. Mais, déterminer la part de chacune de ces causes possibles, et quels sont leurs effets respectifs, c'est une question qui ne peut être résolue que

10

par le calcul fondé sur les équations différentielles du double mouvement de translation et de rotation.

Pour appliquer ces équations au cas d'un projectile pesant qui se meut dans l'air, j'ai d'abord supposé à ce corps une figure et un double mouvement quelconques, et j'ai formé les expressions générales de leurs seconds membres, en considérant la résistance relative à chaque point de la surface du mobile, comme étant composée de deux parties, l'une normale et qu'on appelle la résistance du fluide proprement dite, l'autre tangente et qui constitue le frottement. A l'égard de la première, qui s'exerce seulement sur la portion antérieure du projectile, j'ai admis l'hypothèse ordinaire dans laquelle on prend, pour la mesure de cette force en chaque point, le produit de la densité naturelle du fluide et du carré de la vitesse complète de ce point, dans le sens normal à la surface : cette vitesse complète est celle qui résulte des deux mouvements simultanés du mobile; sa composante normale est dirigée du dedans en dehors, dans la portion antérieure de ce corps, et du dehors en dedans, dans sa portion postérieure; elle est nulle en tous les points de leur ligne de séparation, qui peut être constante ou variable sur la surface. Quant à la seconde, on admet comme un résultat de l'expérience, que le frottement d'un liquide contre un solide, est indépendant de la pression exercée par le liquide sur le solide, et proportionnel à la vitesse relative de ces deux corps, lorsqu'ils sont l'un et l'autre en mouvement; or, pour étendre cette mesure du frottement au cas où le liquide est remplacé par l'air, j'ai supposé qu'elle était, en outre, proportionnelle à la densité de ce fluide en chacun des points où il touche le solide; et comme, dans la question du mouvement des projectiles, on fait abstraction de celui que le mobile imprime à l'air qu'il traverse, il s'ensuit que le frottement, en chaque point de ce corps, est proportionnel, d'une part, à la composante de la vitesse complète de ce point, tangente à la surface, et d'un autre côté, à la densité de l'air qui a lieu en ce même point. On peut, d'ailleurs, regarder l'expression de cette densité comme étant composée de deux termes, l'un constant et égal à la densité

naturelle du fluide, l'autre variable d'un point à un autre, positif en avant du projectile où l'air est condensé, négatif en arrière où l'air est dilaté. Ce second terme nous est inconnu; et sa détermination serait aussi difficile que celle du mouvement du fluide. Je l'ai supposé, en un point quelconque de la surface du mobile, proportionnel à la densité naturelle du fluide et à la composante normale de la vitesse complète de ce point; ce qui était l'hypothèse la plus simple que l'on pouvait faire, et qui se présentait le plus naturellement. De cette manière, l'expression du frottement de l'air se compose aussi de deux termes, dont l'un aurait lieu dans l'état naturel du fluide, et l'autre provient de ses condensations ou dilatations produites par le mouvement de translation du projectile. Chacun de ces deux termes contient un coefficient numérique, qui dépend sans doute du degré de poli du mobile, et ne saurait être déterminé que par l'expérience, pour chaque corps en particulier. Dans les très petites oscillations du pendule, dont les amplitudes successives décroissent en progression géométrique (*), c'est le premier terme du frottement qui produit ce décroissement, et le coefficient de ce terme peut, en conséquence, se conclure du rapport de cette progression, donné par l'observation. A l'égard du coefficient du second terme, il n'a été fait, jusqu'à présent, aucune expérience d'où l'on puisse déduire sa valeur.

Les équations différentielles des deux mouvements simultanés d'un projectile de figure quelconque, formées par ces diverses considérations, sont beaucoup trop compliquées pour qu'il soit possible d'en obtenir les intégrales exactes, ni même pour qu'on puisse en déduire des valeurs approchées des inconnues, assez simples pour être de quelque utilité. J'en ai donc restreint la généralité, en les appliquant particulièrement au cas où le mobile s'écarte très peu de la forme sphérique et de la parfaite homogénéité. De plus, afin de connaître les effets respectifs des trois causes que l'on vient d'indiquer, le frottement contre l'air

(*) Voyez mon *Traité de Mécanique*, Tome Ier, page 352.

la non-sphéricité, la non-homogénéité, je les ai considérées séparément, sauf à réunir ensuite ces effets distincts, si leurs causes ont toutes eu lieu en même temps. Mais la longueur de ce Mémoire m'a forcé de renvoyer à un autre, l'examen de ce qui concerne la troisième cause. Voici, d'une manière succincte, les résultats du calcul qui se rapportent aux deux premières.

Quand un boulet parfaitement sphérique et homogène tourne en sortant de la pièce autour de l'un de ses diamètres, ce mouvement continue pendant toute la durée du trajet dans le même sens et autour de ce même diamètre qui reste aussi constamment parallèle à lui-même; mais, à raison du frottement de l'air et indépendamment de la résistance proprement dite du fluide, la vitesse de rotation décroît continuellement en progression géométrique pour des intervalles de temps égaux. La rapidité de ce décroissement diminue ou augmente, selon que le produit du diamètre et de la densité du projectile augmente ou diminue; elle dépend aussi du coefficient du premier terme dans l'expression du frottement; et il résulte de la valeur de ce nombre, déduite des très petites oscillations d'un pendule à boule de platine, que la vitesse de rotation d'un boulet de *quatre*, dont la surface aurait le même degré de poli que ce métal, décroîtrait à peine d'un dix-millième de sa grandeur en une seconde.

Tandis que le mouvement de translation du boulet n'influe pas sur la rotation, celle-ci, au contraire, influe sur la direction et la portée du projectile. La déviation horizontale qu'elle produit à droite ou à gauche du plan vertical de projection, a lieu du même côté pendant toute la durée du trajet, et est indépendante de l'angle que fait ce plan avec le plan vertical de l'axe de rotation. Lorsque le corps tourne autour d'un axe vertical, la déviation se produit à gauche ou à droite du plan de projection, selon que l'hémisphère antérieur du mobile tourne de gauche à droite ou de droite à gauche, par rapport à une personne placée dans ce plan et qui regarde la trajectoire; elle s'évanouit quand le projectile tourne autour d'un axe horizontal. La déviation verticale, c'est-à-dire, la quantité dont la rotation élève ou

abaisse le boulet, relativement à la position qu'il aurait à chaque instant s'il ne tournait pas, conserve, pendant toute la durée du trajet, un rapport constant avec la déviation horizontale; elle s'évanouit, soit quand les plans verticaux de la ligne du tir et de l'axe de rotation font un angle droit, soit quand cet axe est vertical; lorsqu'il est horizontal et perpendiculaire au plan de projection, l'effet de cette déviation verticale est d'élever ou abaisser le projectile, et, en conséquence, d'augmenter ou diminuer la portée horizontale, selon que la partie antérieure du mobile tourne du haut vers le bas ou du bas vers le haut. Ces résultats se rapportent au cas le plus ordinaire, celui du tir à très peu près horizontal; j'ai aussi considéré le cas où le mobile est projeté verticalement, dans le sens de la pesanteur ou en sens contraire: les formules auxquelles je suis parvenu comprennent toutes les circonstances du double mouvement du projectile; indépendamment du coefficient de la résistance proprement dite, sur lequel il reste encore quelque incertitude, elles renferment aussi les coefficients des deux termes du frottement; et faute des données nécessaires de l'observation, elles ne peuvent, par conséquent, être réduites en nombres. Néanmoins, d'après la composition de la formule qui exprime la déviation horizontale à la distance du canon où le boulet retombe sur le terrain, on reconnaît facilement que cette déviation ne peut jamais être qu'une très petite fraction de la longueur de la portée; en sorte que ce n'est pas au frottement de la surface du boulet contre la couche d'air adjacente et d'inégale densité, que sont dues principalement les déviations observées, ainsi que Robins et Lombard l'avaient pensé.

Pour montrer les effets de la non-sphéricité du projectile, j'ai considéré spécialement le tir de la *carabine* rayée en hélices, et j'ai supposé la balle homogène, mais un peu aplatie ou allongée dans le sens de la direction du tir. Les hélices impriment à la balle, au sortir de l'arme, une rotation très rapide autour d'un axe qui s'écarte très peu de l'axe de figure; le petit angle compris entre ces deux axes, provient de ce que le second ne coïncidait pas exactement avec l'axe des hélices, dans l'intérieur de la carabine. La vitesse de rotation

est en raison inverse de la partie de ce dernier axe, qui répondrait à un tour entier des hélices prolongées s'il est nécessaire, et en raison directe de la vitesse de projection; dans une série d'épreuves faites par les officiers d'artillerie, sous la direction de M. le lieutenant-colonel de Poncharra, et dont les résultats m'ont été communiqués, cette longueur d'axe était de $6^m,226$, la vitesse initiale de 384 mètres par seconde, et, en conséquence, la vitesse angulaire de rotation s'élevait à $\frac{384}{6,226}$ de 360°, ou à 61 tours et demi dans cette unité de temps. Elle demeure constante pendant toute la durée du trajet; mais elle a lieu autour d'un axe qui change continuellement de direction, soit dans l'espace soit dans l'intérieur du mobile. Toutefois, dans le tir de la carabine, supposé à peu près horizontal, ce changement de l'axe de rotation est peu considérable; l'axe instantané s'écarte toujours très peu de l'axe de figure, et celui-ci s'éloigne aussi fort peu de la direction du tir, d'où il résulte que c'est par la partie antérieure, marquée d'avance, que la balle vient frapper une cible verticale, ainsi qu'on le sait par une expérience souvent répétée. Les lois des petites variations de ces deux axes dépendent du système de quatre équations différentielles du premier ordre, linéaires, mais dont les coefficients ne sont pas constants, ce qui n'empêche pas, cependant, qu'on ne parvienne à les intégrer sous forme finie. Elles sont généralement assez compliquées, mais elles deviennent très simples, quand ces deux axes ont coïncidé exactement, à l'origine du mouvement, ensemble et avec la direction initiale du centre de la balle. Dans ce cas particulier, l'axe instantané fait dans l'intérieur du mobile, des oscillations très rapides dont l'amplitude est en raison inverse du carré de la vitesse angulaire de rotation, et diminue continuellement pendant la durée du trajet; les déplacements de l'axe de figure sont plus lents : quand la balle tourne avec une extrême rapidité, il décrit d'un mouvement qui n'est pas uniforme comme cette rotation, un cône droit, dont le sommet est au centre de gravité, l'axe horizontal, et la demi-ouverture égale à l'angle du tir. La vitesse de ce mouvement, toutes

choses d'ailleurs égales, est proportionnelle au degré d'aplatissement ou d'allongement de la balle : dans les épreuves que je viens de citer, où la plus petite dimension du projectile était moindre que la dimension moyenne, d'à peu près un onzième de celle-ci, le *maximum* de cette vitesse, qui a lieu quand le mouvement commence, a dû être environ moitié de la vitesse de rotation.

Ces déplacements simultanés des axes de figure et de rotation, qui proviennent de la non-sphéricité du projectile, ont néanmoins, quoique fort petits, une influence considérable sur le mouvement de translation ; ce qui est contraire à l'opinion d'Euler, citée plus haut, et suffirait pour montrer combien les questions relatives au double mouvement des corps solides, sont loin de pouvoir se résoudre sans le secours de l'analyse mathématique : on pourra, en effet, comparer les raisonnements plus ou moins spécieux d'Euler même, dans ses remarques sur la 46ᵉ proposition du livre de Robins, aux résultats précis de l'analyse en cette matière. Le calcul fait voir que dans le tir de la carabine rayée en hélices, les déviations horizontale et verticale du mouvement de translation, résultantes de la forme de la balle, sont de deux sortes qu'il importe de distinguer et qui se trouvent heureusement séparées dans les formules. Les unes proviennent de ce qu'à l'origine du mouvement, l'axe de figure et l'axe de rotation s'écartaient un tant soit peu, par une cause quelconque, de la ligne du tir. Ces écarts accidentels ont lieu tantôt dans un sens et tantôt dans un autre ; leurs effets se confondent avec ceux qui résultent du degré d'adresse, plus ou moins grand, du soldat ; ils influent sur la justesse du tir à chaque coup ; mais ils se balancent dans une longue série d'épreuves, et n'influent pas sur les déviations moyennes. Abstraction faite de ces causes variables, la forme allongée ou aplatie de la balle, tournant sur elle-même, donne aussi lieu à des déviations, mais dans un sens déterminé et qui se reproduisent à tous les coups ; c'est à cette cause constante que les déviations moyennes doivent être attribuées, quand le projectile est homogène et l'air calme, comme on le suppose ici. Son effet est de diminuer ou d'augmenter la portée, ou, ce qui

est la même chose, d'augmenter ou de diminuer, pour une portée de longueur donnée, l'angle du tir correspondant à des vitesses de projection et de rotation aussi données. L'angle du tir ayant été calculé *à priori*, ou déterminé par l'expérience, il faut, pour approcher davantage dans une longue série d'épreuves, de la verticale menée par le centre de la cible, tirer sous cet angle en visant un peu à droite ou un peu à gauche, selon le sens de la rotation, et à une distance de cette ligne calculée d'avance. Dans les épreuves citées plus haut, cette distance horizontale a eu lieu à la gauche ou à la droite du soldat, selon que la partie supérieure de la balle tournait de gauche à droite ou de droite à gauche, et elle a dû s'élever à quelques millimètres seulement pour une portée de 250 mètres; mais elle pourrait être moins petite dans d'autres cas. L'équation qui sert à déterminer l'angle du tir, fait voir qu'il n'est pas le même, quand la balle est aplatie, et lorsqu'elle est allongée; résultat important pour la pratique, qui se trouve confirmé par ces mêmes épreuves. En effet, la moyenne d'un très grand nombre de coups, tirés avec des balles aplaties, ayant donné 62′30″ pour l'angle du tir, à 250 mètres de distance de la cible, on a tiré ensuite, à cette même distance et sous ce même angle, avec de pareilles balles et avec des balles allongées. Or, avec des balles aplaties, on a atteint le plan de la cible, de deux mètres de hauteur et deux tiers de mètres de largeur, quatre-vingt-sept fois sur cent, et avec des balles allongées, seulement quarante-neuf fois; ce qui montre que l'angle du tir déterminé pour une forme de la balle ne convient pas pour une autre. Il ne faudrait pas conclure, en effet, de cette expérience, que la balle aplatie fût la plus avantageuse; car si l'on tirait, sous l'angle déterminé pour la balle allongée, avec des balles de cette forme et avec des balles aplaties, ce serait, au contraire, les premières qui auraient l'avantage. Observons, d'ailleurs, que dans notre exemple, l'angle du tir calculé pour les balles aplaties, est égal à 59′30″; ce qui ne s'écarte du résultat de l'expérience, que de 3′; différence que l'on peut attribuer, sans scrupule, aux erreurs inévitables dans ce genre d'observations, et aussi au degré d'approximation

du calcul, qui suppose que l'on néglige le carré de la fraction un onzième, relative à l'aplatissement. Enfin, dans ce même exemple, on trouve une seconde et un quart pour la durée du trajet de 250 mètres; ce que je n'ai pas pu vérifier par l'expérience, attendu que ce temps n'a pas été observé : toutes choses d'ailleurs égales, ce temps ne serait que d'à peu près une seconde, et l'angle du tir de 54', si la balle était parfaitement ronde; valeurs plus petites que pour une balle aplatie dans le sens du mouvement, parce que l'air oppose à celle-ci une plus grande résistance qu'à la balle ronde, et, par conséquent, ralentit davantage sa vitesse.

---

§ I. *Équations différentielles du double mouvement de translation et de rotation du projectile.*

(1). En supposant au mobile une forme et des dimensions quelconques, on désignera par la lettre G son centre de gravité, et au bout du temps t, écoulé depuis l'origine du mouvement, on représentera par x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires de ce point G, rapportées à des axes fixes Ox, Oy, Oz. Leur origine O sera le point de départ de G, et l'axe Oz, vertical et dirigé en sens contraire de la pesanteur, ce qui rendra horizontal le plan des x et y. On supposera que le plan vertical des x et z, comprenne la direction initiale du mouvement de G, et que l'axe Ox soit dirigé du côté de ce mouvement; l'axe Oy sera dirigé d'un côté ou de l'autre du plan des x et z; pour fixer les idées, on supposera que ce soit à gauche d'une personne placée au point O et tournée vers l'axe Ox : c'est toujours relativement à cette personne que se rapporteront, par la suite, les mots *gauche* et *droite*.

De cette manière, la variable z aura une valeur positive ou négative, selon que le centre G se sera élevé ou abaissé par rapport au plan horizontal, passant par son point de départ. La variable x sera

toujours positive, à moins que la direction initiale de G s'écartant fort peu de Oz, le point G ne puisse passer d'un côté à l'autre de cette droite, par l'effet de la résistance de l'air, exercée à la surface du mobile, et comprenant la résistance proprement dite et le frottement contre ce fluide. La variable y passera du positif au négatif, lorsque le centre G, par suite de cette résistance ou de ce frottement, passera de gauche à droite du plan fixe des x et z; et généralement, cette troisième coordonnée y sera très petite, relativement à x ou à z.

Par le point G, menons les trois demi-axes principaux $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, qui se coupent en ce point, et trois autres droites Gx, Gy, Gz, parallèles aux axes des x, y, z, et dirigées dans le même sens. Soit aussi GL, une des deux parties, choisie arbitrairement, de l'intersection du plan mobile de $Gx_{,}$ et $Gy_{,}$, avec le plan horizontal, mené par le point G. Au bout du temps t, faisons

$$LGx = \psi, \quad LGx_{,} = \varphi, \quad zGz_{,} = \theta;$$

de sorte que ψ, φ, θ, soient les trois angles variables que l'on a coutume d'employer pour déterminer à chaque instant les trois droites $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, fixes dans l'intérieur d'un mobile, et rencontrant constamment sa surface aux mêmes points.

Les angles ψ et φ pourront croître indéfiniment, en plus ou en moins pendant le mouvement; mais en y supprimant à un instant donné les multiples de 360° que leurs valeurs renfermeront, nous supposerons qu'on les réduise à des angles positifs et moindres que 360°. L'angle θ sera positif et pourra seulement s'étendre depuis zéro jusqu'à 180°; qu'il soit aigu ou obtus, cet angle θ pourra être égal à l'angle dièdre, formé des deux angles plans ψ et φ, ou bien à son supplément, selon que l'on prendra pour $Gz_{,}$, l'une ou l'autre des deux parties de la normale au plan de $Gx_{,}$ et $Gy_{,}$: on supposera que ce soit le premier cas qui ait lieu, ce qui déterminera pour toute la durée du mouvement, celle de ces deux parties qui sera prise pour $Gz_{,}$. Pendant cette durée, le demi-axe $Gz_{,}$ se trouvera au-dessus ou

au-dessous du plan horizontal de Gx et Gy, suivant que θ sera aigu ou obtus. Quant au sens dans lequel les angles ψ et φ seront comptés, nous conviendrons de porter l'angle ψ à partir de Gx, vers le prolongement de Gy, ou de gauche à droite, de manière que la ligne GL, à laquelle il aboutit, coïncide, par exemple, avec Gx, avec le prolongement de Gy, avec celui de Gx, avec Gy, lorsque l'angle ψ sera zéro, 90°, 180°, 270°. Ensuite, nous porterons d'abord dans le plan horizontal, l'angle φ à partir de GL et vers Gx; puis nous ferons tourner cet angle autour de son côté GL, en l'élevant au-dessus du plan horizontal, jusqu'à ce que l'angle dièdre, formé de φ et ψ, soit devenu égal à θ; la position de la droite $Gx_{,}$, à laquelle aboutit l'angle φ, sera alors déterminée dans le plan incliné: $Gx_{,}$ tombera au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, selon qu'on aura $\varphi < 180°$ ou $\varphi > 180°$, et sur GL ou sur son prolongement dans les cas de $\varphi = 0$ et $\varphi = 180°$. Les valeurs initiales et données de ψ et φ détermineront la partie de l'intersection du plan incliné et du plan horizontal, que l'on prendra pour la droite GL pendant toute la durée du mouvement, et celui des quatre demi-axes principaux, contenus dans le plan incliné, que l'on prendra de même pour $Gx_{,}$. Nous prendrons ensuite pour $Gy_{,}$, celui de ces quatre demi-axes, qui fait avec GL, un angle égal à $\varphi + 90°$. En élevant par le point G, une normale au plan de $Gx_{,}$ et $Gy_{,}$, la partie de cette droite qui fera avec Gz, l'angle θ aigu ou obtus, sera le troisième demi-axe $Gz_{,}$.

D'après ces conventions, les directions des trois demi-axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, seront déterminées à chaque instant sans aucune ambiguité, lorsque l'on connaîtra les valeurs de φ, ψ, θ, en fonctions du temps. En y joignant les valeurs de x, y, z, en fonctions de t, la position du mobile sera aussi complétement déterminée. Ces six variables x, y, z, φ, ψ, θ, sont donc les inconnues du problème qui a pour objet de connaître le double mouvement dans l'espace, d'un corps solide entièrement libre; elles dépendent d'un pareil nombre d'équations différentielles du second ordre; les trois premières se rapportent au mou-

vement de translation, et les trois dernières au mouvement de rotation autour du centre de gravité.

(2). A un instant quelconque, les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, sont les trois composantes de la vitesse de translation du projectile; celles de sa vitesse de rotation se déduiront des valeurs de $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, et des angles ψ, φ, θ, par des formules connues qui sont indépendantes des forces appliquées à ce corps.

Pour obtenir ces formules, il faut d'abord rappeler qu'un corps solide, retenu par un point fixe, tourne constamment autour d'un axe passant par ce point, qui demeure invariable pendant la durée de chaque instant infiniment petit, et change de direction, d'un instant à un autre, de sorte qu'on l'appelle pour cette raison l'*axe instantané de rotation*. Les diamètres du mobile, autour duquel ce corps tourne successivement, forment dans son intérieur un certain cône qui peut avoir une base quelconque. Pendant la durée de chaque instant infiniment petit, tous les points du corps décrivent des arcs de cercle dans des plans perpendiculaires à l'axe instantané, et qui ont leurs centres sur cette droite; ces arcs, aussi infiniment petits, sont proportionnels à leurs rayons respectifs. Les angles correspondants sont donc les mêmes pour tous les points du corps; le rapport de l'un de ces angles au temps employé à le décrire, s'appelle la *vitesse angulaire de rotation*, ou simplement la *vitesse de rotation* du mobile. Maintenant, si ce corps est entièrement libre, l'axe instantané de rotation, passera continuellement par le centre de gravité; mais il ne demeurera plus fixe, et restera seulement parallèle à lui-même, pendant la durée de chaque instant. Ainsi, GI étant la direction de cet axe au bout du temps t, cette droite sera emportée pendant l'instant dt, parallèlement à elle-même, avec la vitesse du mouvement de translation du mobile; et pendant ce même instant, ce corps tournera autour de GI, comme autour d'un axe fixe, avec une certaine vitesse angulaire que je désignerai par ω. Cette quantité variera.

avec le temps, aussi bien que chacun des angles $IOx_{,}$, $IOy_{,}$, $IOz_{,}$, ou des angles IOx, IOy, IOz, qui déterminent à chaque instant la direction du demi-axe OI, soit dans l'intérieur du mobile, soit dans l'espace.

Cela posé, on démontre que toute vitesse de rotation autour d'un axe donné, se décompose en trois autres vitesses autour de trois axes rectangulaires, suivant les mêmes lois qu'une vitesse de translation se décompose en trois vitesses de cette autre nature; les directions des axes remplaçant dans le cas de la rotation, celles des vitesses dans le cas de la translation. Si donc on désigne par p, q, r, les composantes autour des trois axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, de la vitesse ω autour de GI, on aura

$$p = \omega\cos IOx_{,}, \quad q = \omega\cos IOy_{,}, \quad r = \omega\cos IOz_{,};$$

ce qui signifie qu'abstraction faite de la translation du corps pendant l'instant dt, et les quantités p, q, r, étant déterminées par ces équations, si l'on fait d'abord décrire à tous les points du mobile, un angle pdt autour de $Gx_{,}$, puis un angle qdt autour de $Gy_{,}$, enfin un angle rdt autour de $Gz_{,}$, il se trouvera après ces trois mouvements successifs, dans la même position que si tous ses points eussent décrit un angle ωdt autour de GI.

Chacune des trois quantités p, q, r, pourra être positive ou négative, selon que la rotation qui lui correspond aura lieu dans un sens ou en sens contraire; pour fixer les idées, on supposera que la dernière r soit positive, lorsque la rotation autour de $Gz_{,}$ se fera de $Gx_{,}$ vers $Gy_{,}$, et négative quand cette rotation aura lieu en sens contraire, ou de $Gy_{,}$ vers $Gx_{,}$; de même, q sera une quantité positive ou négative, suivant que la rotation qui aura lieu autour de $Gy_{,}$ se fera de $Gz_{,}$ vers $Gx_{,}$, ou en sens contraire; et p aura aussi le signe $+$ ou le signe $-$, selon que la rotation autour de $Gx_{,}$ se fera de $Gy_{,}$ vers $Gz_{,}$, ou bien de $Gz_{,}$ vers $Gy_{,}$. La quantité ω sera toujours positive, et égale à la racine carrée de $p^2 + q^2 + r^2$, prise avec le

signe +. Ces suppositions sont faites pour que l'on puisse passer facilement, par le genre de permutations de lettres que j'ai expliqué dans mon *Traité de Mécanique* (*), des formules qui répondent à l'un des trois demi-axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, aux formules analogues qui se rapportent à un autre. Le sens de la rotation du mobile autour de l'axe instantané, et la partie de cette droite qui sera prise pour le demi-axe GI, se trouveront déterminés à chaque instant, par les signes de p, q, r : au bout du temps t, si ces quantités sont toutes trois égales et de signes contraires à ce qu'elles étaient au bout d'un autre temps t', le demi-axe se sera changé dans son prolongement, d'une époque à l'autre; le corps tournera donc autour de la même droite, à ces deux époques, mais dans les deux sens opposés, c'est-à-dire de gauche à droite par exemple, si GI coïncide d'abord avec Gx, et ensuite de droite à gauche; et ce changement résultera de celui des signes de p, q, r, sans que la vitesse ω ait cessé d'être positive.

Actuellement les formules connues qui lient les vitesses p, q, r, aux trois angles ψ, φ, θ, sont

$$\left.\begin{aligned} p &= -\sin\theta\sin\varphi\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\theta}{dt}, \\ q &= -\sin\theta\cos\varphi\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\theta}{dt}, \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta\frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Elles supposent ces angles et ces vitesses, comptés comme il a été dit dans le numéro précédent et dans celui-ci, et n'exigent pas que les droites rectangulaires $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, soient les axes principaux du mobile, ni que le point G soit son centre de gravité. Les deux premières ont des signes contraires à ceux des expressions de p et q que renferme le n° 410 de mon *Traité de Mécanique*; ce qui tient

(*) Tome Ier, page 87.

à ce que les formules du n° 379 supposent l'axe Oz situé au-dessus du plan des x et y, et l'angle φ porté au-dessous, tandis qu'ici nous supposons l'un et l'autre au-dessus de ce plan; différence qui a donné lieu aux changements de signes de quatre des neufs quantités déterminées dans ce n° 379, savoir, de a'', b'', c, c', et par suite, aux changements de signes de p et q.

(3). Pour former les équations différentielles du double mouvement de translation et de rotation du projectile, soient m sa masse et mg son poids diminué de celui du volume d'air dont il tient la place, de sorte que g exprime la pesanteur dans ce fluide. Désignons aussi par X, Y, Z, les sommes des composantes parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, de toutes les autres forces motrices appliquées au mobile; lesquelles composantes seront des quantités positives ou négatives, selon qu'elles agiront dans les directions de ces axes ou en sens contraire. Le mouvement du centre de gravité étant, comme on sait, le même à chaque instant, que si la masse entière du mobile y était réunie, et que toutes les forces motrices y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes, on aura

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg + \mathrm{Z}, \qquad (2)$$

pour les trois équations différentielles qui seront aussi celles du mouvement de translation.

On démontre également que, pendant l'instant dt, le mouvement de rotation autour du centre G est le même que si ce point était fixe et que les forces données ne fussent pas changées; d'où il résulte que les trois équations différentielles du mouvement de rotation seront

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{C}\frac{dr}{dt} + (\mathrm{B} - \mathrm{A})qp &= \mathrm{Z}_{,}, \\ \mathrm{B}\frac{dq}{dt} + (\mathrm{A} - \mathrm{C})pr &= \mathrm{Y}_{,}, \\ \mathrm{A}\frac{dp}{dt} + (\mathrm{C} - \mathrm{B})rq &= \mathrm{X}_{,}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

en désignant par $X_,$, $Y_,$, $Z_,$, les sommes des moments de toutes ces forces, rapportés aux axes $Gx_,$, $Gy_,$, $Gz_,$, et par A, B, C, les moments d'inertie du mobile, relatifs à ces mêmes axes. Dans la somme $Z_,$, les moments sont positifs ou négatifs, selon que les forces tendent à faire tourner, de $Gx_,$ vers $Gy_,$, ou de $Gy_,$ vers $Gx_,$, autour de $Gz_,$; ils sont de même, ou positifs, ou négatifs dans $Y_,$, selon que les forces tendent à faire tourner autour de $Gy_,$, ou de $Gz_,$ vers $Gx_,$, ou de $Gx_,$ vers $Gz_,$, et dans $X_,$, selon qu'elles tendent à faire tourner, ou de $Gy_,$ vers $Gz_,$, ou de $Gz_,$ vers $Gy_,$, autour de $Gx_,$. On trouvera dans mon *Traité de Mécanique*, la démonstration de ces équations réduite, je crois, à sa forme la plus simple.

Si l'on élimine p, q, r, entre les équations (1) et (3), on aura trois équations différentielles du second ordre, par rapport à ψ, φ, θ, qu'il faudra joindre aux trois équations (2); mais il vaudra mieux conserver les six inconnues p, q, r, ψ, φ, θ, jointes à x, y, z, et prendre les neuf équations (1), (2), (3), dont deux du premier ordre et trois du second, pour les équations différentielles du problème. Leurs intégrales complètes contiendront douze constantes arbitraires, que l'on déterminera au moyen des valeurs initiales et données de x, y, z, ψ, φ, θ, et de celles des vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, lorsqu'elles seront aussi données, ce qu'on supposera effectivement, dans la suite de ce Mémoire; si elles ne l'étaient pas, on les déterminerait au moyen des six équations connues

$$m\frac{dx}{dt} = A', \quad m\frac{dy}{dt} = B', \quad m\frac{dz}{dt} = C',$$
$$Ap = A_,, \quad Cq = B_,, \quad Br = C_,,$$

relatives à $t = 0$, et dans lesquelles A', B', C', sont les sommes des composantes parallèles aux axes des x, y, z, des percussions initiales, et $A_,$, $B_,$, $C_,$, les sommes de leurs moments rapportés aux axes $Gx_,$, $Gy_,$, $Gz_,$.

(4). Occupons-nous maintenant de la détermination des quantités

X, Y, Z, $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, que renferment les équations (2) et (3), et qui proviendront, dans la question que nous considérons, de la résistance et du frottement du fluide dans lequel le projectile est en mouvement.

Le cas le plus simple est celui d'un prisme droit, dont tous les points décrivent des lignes parallèles à ses arêtes, et qui tombe verticalement pour fixer les idées. La résistance proprement dite du fluide s'exercera de bas en haut, sur la base inférieure; elle aura pour expression, d'après l'hypothèse ordinaire et que nous admettrons, le produit $nbDV^2$, où l'on désigne par V la vitesse de ce corps, par b l'aire de sa base, par D la densité naturelle du fluide, distincte de la densité près de cette base, et par n un coefficient numérique et donné. Le projectile éprouvera, en outre, sur ses faces latérales, un frottement vertical et dirigé de bas en haut, que l'on supposera proportionnel à la somme de leurs surfaces, à la vitesse V, à la densité D, et que l'on représentera en conséquence par le produit $acDV$, en désignant par a cette surface totale et par c une constante donnée. On suppose que toutes les faces latérales ont le même degré de poli, dont la quantité c pourra dépendre; si elles étaient inégalement polies, elles pourraient éprouver des frottements différents, qui produiraient un mouvement de rotation, de sorte que, contre l'hypothèse, tous les points du projectile ne décriraient plus des droites parallèles. La constante c devra être une vitesse, afin de rendre le produit $acDV$ homogène avec la force motrice représentée par $nbDV^2$. En appelant H la hauteur due à la vitesse V, et remplaçant V^2 par $2gH$ dans le produit $nbDV^2$, qui devient alors $2ngbHD$, on voit qu'il représente effectivement une force motrice, c'est-à-dire, le poids d'un volume de fluide, ayant pour base celle du prisme, et pour hauteur $2n$ fois cette hauteur H.

Lorsque le projectile aura une ou plusieurs faces, qui ne seront ni parallèles, ni perpendiculaires à la direction de son mouvement, la résistance et le frottement qui auront lieu sur chacune de ces faces, dépendront des composantes de la vitesse, respectivement perpendiculaire et tangente à cette face. Supposons, par exemple, que le mobile soit un tronc de pyramide régulière, qui ait ses deux bases

horizontales et toutes ses faces latérales également polies; supposons aussi, ce qui sera possible, que tous les points de ce corps décrivent, en tombant, des droites verticales; soit toujours V leur vitesse commune, et conservons de même toutes les autres notations précédentes. La résistance du fluide qui s'exercera de bas en haut sur la base inférieure, aura encore $nbDV^2$ pour valeur : cette base n'éprouvera aucun frottement; sur la base supérieure, il n'y aura ni résistance, ni frottement. Quant aux faces latérales, le résultat sera différent, selon que la base inférieure b sera la plus petite ou la plus grande des deux bases du projectile. Dans le premier cas, le seul où ses faces éprouveront une résistance normale, cette force sur chaque face, sera égale au produit de nD et de l'aire de cette face, multiplié par le carré de la composante normale de la vitesse, c'est-à-dire, par $V^2 \cos^2 i$, en appelant i l'angle compris entre la normale et la verticale. Elle se décomposera en deux forces, l'une horizontale que l'on n'aura pas à considérer, et l'autre verticale qui se déduira de la force normale, en la multipliant par $\cos i$. Les composantes horizontales se détruiront mutuellement; les composantes verticales s'ajouteront et formeront une force totale, égale à $naDV^2 \cos^3 i$, qui agira de bas en haut et s'ajoutera à la force $nbDV^2$ relative à la base inférieure. Que cette base b soit la plus petite ou la plus grande, le frottement sur chaque face latérale sera proportionnel, d'une part à la composante de la vitesse tangente à cette face, c'est-à-dire à $V \sin i$, et d'un autre côté à la densité de l'air en contact avec cette même face. Cette densité sera inconnue; nous la désignerons par Δ ou par Δ', selon que b sera la plus petite ou la plus grande des deux bases; et comme, par l'effet du mouvement du corps, l'air se trouvera comprimé dans le premier cas et dilaté dans le second, on aura $\Delta > D$ et $\Delta' < D$. Dans les deux cas, les composantes horizontales du frottement se détruiront mutuellement. La composante verticale sur chaque face, se déduira de la force tangente en la multipliant par $\sin i$, et il en résultera une force totale, dirigée de bas en haut, et égale, soit à $ac\Delta V \sin^2 i$, soit à $ac\Delta' V \sin^2 i$. Dans l'exemple du prisme, dont

les faces latérales étaient verticales, on avait $i = 90°$, et l'air en contact n'étant ni condensé ni dilaté, on devait remplacer Δ ou Δ' par D, ce qui donnait $ac\mathrm{DV}$ pour la mesure du frottement.

Ainsi, dans la chute verticale d'un tronc de pyramide régulière, qui a ses deux bases horizontales, la force verticale provenant de la résistance proprement dite et du frottement, a pour mesure, dans les hypothèses que nous adoptons,

$$nb\mathrm{DV}^2 + na\mathrm{DV}^2\cos^3 i + ac\Delta\mathrm{V}\sin^2 i,$$

lorsque la base inférieure est la plus petite, et

$$nb\mathrm{DV}^2 + ac\Delta'\mathrm{V}\sin^2 i,$$

quand elle est la plus grande. Il était bon d'examiner en détail cet exemple particulier; actuellement il s'agira d'étendre ces mesures au cas général d'un projectile animé des deux mouvements de translation et de rotation, et ayant une forme quelconque : nous supposerons toutefois que sa superficie ne présente aucune concavité, et ne puisse être rencontrée par une ligne droite, en plus de deux points.

(5). Pour cela, soient M un point quelconque de cette surface, et $x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$, ses trois coordonnées rapportées aux axes $Gx_{\prime}$, $Gy_{\prime}$, $Gz_{\prime}$, fixes dans l'intérieur du mobile, de manière que $x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$ varient d'un point M à un autre, et ne varient point avec le temps t. L'équation de cette surface sera

$$f(x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}) = 0; \qquad (4)$$

f désignant une fonction donnée.

Par le point M, menons un plan tangent et une normale à cette même surface ; soit MN la partie extérieure de cette droite, et désignons par $\lambda_{\prime}, \mu_{\prime}, \nu_{\prime}$, les angles qu'elle fait, au bout du temps t, avec des parallèles aux axes des $x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$, menées par le point M. Nous

aurons

$$\cos \lambda_{,} = \frac{1}{h}\frac{df}{dx_{,}}, \quad \cos \mu_{,} = \frac{1}{h}\frac{df}{dy_{,}}, \quad \cos \nu_{,} = \frac{1}{h}\frac{df}{dz_{,}}, \qquad (5)$$

en faisant, pour abréger,

$$h = \sqrt{\left(\frac{df}{dx_{,}}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy_{,}}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz_{,}}\right)^2},$$

et donnant à ce radical le signe nécessaire pour que les formules (5) se rapportent à la normale extérieure MN et non pas à son prolongement dans l'intérieur du mobile. Soient, en outre, λ, μ, ν, les angles que fait cette normale extérieure avec des parallèles aux axes des x, y, z, menées par le point M. Par ce même point, menons dans le plan tangent une droite MT qui soit la projection, sur ce plan, de la droite suivant laquelle est dirigée la vitesse complète de M, résultante du double mouvement de translation et de rotation du projectile. Cette droite fera avec cette vitesse un angle aigu; elle pourra changer, d'un instant à un autre, de position sur le plan tangent; au bout du temps t, nous représenterons par $\lambda'_{,}$, $\mu'_{,}$, $\nu'_{,}$, les angles qu'elle fait avec des parallèles aux axes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, et par λ', μ', ν', ceux qu'elle fait avec des parallèles aux axes des x, y, z; angles qui pourront être aigus ou obtus, et que nous n'aurons pas besoin de connaître, comme on le verra par la suite. Enfin, décomposons la vitesse complète du point M, en deux autres, l'une normale et l'autre tangente à la surface du mobile. On désignera la première par V, et on la considérera comme une quantité positive ou comme une quantité négative, selon que cette composante se trouvera dirigée suivant MN ou suivant son prolongement, c'est-à-dire, selon que la vitesse complète de M fera un angle aigu ou un angle obtus, avec la normale extérieure MN. On désignera aussi par V′ la seconde composante, qui sera toujours dirigée suivant MT, et sera toujours une quantité positive. C'est dans les directions contraires à ces composantes V et V′ que la résistance proprement dite et le frottement de l'air s'exerceront au point M; toutefois, la résistance nor-

male n'aura lieu qu'aux points de la surface où V sera positive, et on la regardera comme nulle en tout autre point : le frottement s'exercera en tous les points, mais avec une intensité différente, toutes choses d'ailleurs égales, selon le degré de compression ou de dilatation de l'air en contact avec chaque élément de cette surface.

Cela posé, soit $d\sigma$ l'élément qui répond au point M, D la densité naturelle du fluide, et n un coefficient numérique et donné : sur cet élément, la résistance normale aura pour valeur $nDV^2d\sigma$; et comme elle sera dirigée suivant le prolongement de MN, ses composantes parallèles aux axes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, s'obtiendront en la multipliant par $-\cos\lambda_{,}$, $-\cos\mu_{,}$, $-\cos\nu_{,}$, et ses composantes parallèles aux axes des x, y, z, en la multipliant par $-\cos\lambda$, $-\cos\mu$, $-\cos\nu$. De plus, après avoir formé l'expression complète de V, l'équation

$$V = 0, \qquad (6)$$

jointe à celle de la surface, déterminera une courbe qui divisera cette surface en deux parties, telles que la valeur de V sera positive pour tous les points de l'une et négative pour tous ceux de l'autre. Nous appellerons la première, la partie *antérieure* du projectile, et la seconde, la partie *postérieure*. Or, par hypothèse, la résistance normale s'exercera seulement sur la partie antérieure ; si donc on désigne par $\int_{,}$, les intégrales étendues à toute cette portion de surface, et que l'on réserve $\int$ pour indiquer les intégrales relatives à la surface entière, on aura

$$-nD\int_{,}V^2\cos\lambda d\sigma, \quad -nD\int_{,}V^2\cos\mu d\sigma, \quad -nD\int_{,}V^2\cos\nu d\sigma,$$

pour les parties de X, Y, Z, qui proviennent de cette résistance. D'après les signes que l'on doit attribuer (n° 3) aux moments des diverses forces, dans les expressions de $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, ceux des composantes parallèles aux axes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, de la résistance normale, agissant au point M, seront

$$y_{,}nDV^2\cos\lambda_{,}d\sigma - x_{,}nDV^2\cos\mu_{,}d\sigma,$$

par rapport à l'axe $Gz_{,}$;

$$x_{,}n\mathrm{DV}^2\cos\nu_{,}d\sigma - z_{,}n\mathrm{DV}^2\cos\lambda_{,}d\sigma,$$

relativement à l'axe $Gy_{,}$, et

$$z_{,}n\mathrm{DV}^2\cos\mu_{,}d\sigma - y_{,}n\mathrm{DV}^2\cos\nu_{,}d\sigma,$$

par rapport à l'axe $Gx_{,}$. Par conséquent, les parties de $Z_{,}$, $Y_{,}$, $X_{,}$, provenant des résistances normales, seront données par les formules :

$$n\mathrm{D}\int_{,}(y_{,}\cos\lambda_{,} - x\cos\mu_{,})\mathrm{V}^2d\sigma,$$
$$n\mathrm{D}\int_{,}(x_{,}\cos\nu_{,} - z_{,}\cos\lambda_{,})\mathrm{V}^2d\sigma,$$
$$n\mathrm{D}\int_{,}(z_{,}\cos\mu_{,} - y_{,}\cos\nu_{,})\mathrm{V}^2d\sigma.$$

A l'égard du frottement qui s'exercera sur l'élément $d\sigma$, il aura pour expression le produit $\rho\mathrm{V}'d\sigma$, dans lequel ρ est une quantité positive, proportionnelle à la densité de l'air en contact avec $d\sigma$, qui pourra varier, en outre, d'un élément à un autre, à raison du degré de poli de la surface, et devra avoir pour facteurs, comme dans l'exemple du nº précédent, une densité et une vitesse, afin que $\rho\mathrm{V}'d\sigma$ puisse représenter une force motrice. Cette force étant d'ailleurs dirigée en sens contraire de MT, on obtiendra ses composantes parallèles aux axes des x, y, z, en la multipliant par $-\cos\lambda'$, $-\cos\mu'$, $-\cos\nu'$, et ses composantes parallèles aux axes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, en la multipliant par $-\cos\lambda'_{,}$, $-\cos\mu'_{,}$, $-\cos\nu'_{,}$. D'où l'on conclut d'abord

$$-\int\rho\mathrm{V}'\cos\lambda'd\sigma,\quad -\int\rho\mathrm{V}'\cos\mu'd\sigma,\quad -\int\rho\mathrm{V}'\cos\nu'd\sigma,$$

pour les parties de X, Y, Z, qui proviennent du frottement de tous les points du mobile contre le fluide, et ensuite

$$\int(y_{,}\cos\lambda'_{,} - x_{,}\cos\mu'_{,})\rho\mathrm{V}'d\sigma,$$
$$\int(x_{,}\cos\nu'_{,} - z_{,}\cos\lambda'_{,})\rho\mathrm{V}'d\sigma,$$
$$\int(z_{,}\cos\mu'_{,} - y_{,}\cos\nu'_{,})\rho\mathrm{V}'d\sigma,$$

pour les parties de $Z_{,}$, $Y_{,}$, $X_{,}$, dues à la même cause.

Les valeurs complètes des six quantités X, Y, Z, $X_,$, $Y_,$, $Z_,$, contenues dans les équations (2) et (3), seront donc

$$\left.\begin{aligned}
X &= -nD\int_, V^2 \cos\lambda d\sigma - \int \rho V' \cos\lambda' d\sigma, \\
Y &= -nD\int_, V^2 \cos\mu d\sigma - \int \rho V' \cos\mu' d\sigma, \\
Z &= -nD\int_, V^2 \cos\nu d\sigma - \int \rho V' \cos\nu' d\sigma, \\
X_, &= nD\int_, (z_, \cos\mu_, - y_, \cos\nu_,) V^2 d\sigma + \int (z_, \cos\mu'_, - y_, \cos\nu'_,) \rho V' d\sigma, \\
Y_, &= nD\int_, (x_, \cos\nu_, - z_, \cos\lambda_,) V^2 d\sigma + \int (x_, \cos\nu'_, - z_, \cos\lambda'_,) \rho V' d\sigma, \\
Z_, &= nD\int_, (y_, \cos\lambda_, - x_, \cos\mu_,) V^2 d\sigma + \int (y_, \cos\lambda'_, - x_, \cos\mu'_,) \rho V' d\sigma.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

(6) Ces formules conviendront également au cas où le fluide dans lequel le corps se meut est un liquide incompressible, et au cas où le mouvement a lieu dans un fluide élastique, dans l'air, par exemple, comme nous le supposons dans ce mémoire. Mais la détermination, dans ce dernier cas, de la densité du fluide près de la surface du projectile, est un problème que l'on est loin de savoir résoudre. Pour y suppléer, il faudra donc faire une hypothèse sur cette densité et sur l'expression de ρ. Or, on peut admettre qu'en chaque point M de cette surface, la différence entre la densité variable du fluide et sa densité naturelle D, ne dépend que de la vitesse normale V du projectile en ce même point, et qu'il y a compression ou dilatation du fluide, selon que cette vitesse est positive ou négative, c'est-à-dire, selon qu'elle est dirigée du dedans en dehors, ou du dehors en dedans. Cela étant, l'hypothèse la plus simple sera de supposer cette différence proportionnelle à V, et de faire, en conséquence,

$$\rho = n'D(k + V); \qquad (8)$$

n' et k étant des quantités positives, dont la première sera un nombre abstrait, et la seconde une vitesse variable, du point M à un autre, avec le degré de poli de la surface du projectile, invariable quand la surface sera partout également polie, comme on le supposera dans la suite.

Dans la partie antérieure du mobile, cette expression de ρ sera toujours positive; dans la partie postérieure, elle pourra devenir

négative; on ne devra donc pas l'étendre aux points pour lesquels cela arrivera effectivement, et qui seront situés sur la surface, en-deçà de la courbe où l'on aura

$$k + V = 0. \qquad (9)$$

Mais en ces points, le frottement n'aura pas lieu ou sera insensible, à raison de l'extrême ténuité du fluide, ou d'un vide presque parfait qui se fera, dans le cas d'une très grande vitesse du projectile, entre l'air et une partie de la surface; on pourra donc négliger le frottement dans cette portion de surface, et ne pas étendre les intégrales désignées par $\int$ en-deçà de la courbe déterminée par les équations (4) et (9), de même que les intégrales $\int_{,}$ ne s'étendent pas en-deçà de la ligne qui répond aux équations (4) et (6).

De cette manière, il ne restera plus qu'à former, pour les substituer sous les signes $\int$ et $\int_{,}$, les expressions générales des vitesses V et V', et de leurs composantes, soit par rapport aux axes des x, y, z, soit par rapport à ceux des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$.

(7). Désignons par u, v, w, les composantes parallèles aux axes fixes Ox, Oy, Oz, de la vitesse complète de M, de sorte que les parties de u, v, w, qui proviennent du mouvement de translation, soient $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, pour M comme pour tout autre point du projectile. Les coordonnées de M rapportées aux axes mobiles $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, étant $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, et les composantes autour de ces axes, de la vitesse angulaire de rotation, étant p, q, r, les composantes parallèles à ces mêmes axes de la vitesse absolue du point M, qui résulteront de la rotation du mobile autour de l'axe instantané GI, seront, comme on peut le voir dans mon *Traité de Mécanique*,

$$qz_{,} - ry_{,}, \quad rx_{,} - pz_{,}, \quad py_{,} - qx_{,}.$$

Par conséquent, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} + \alpha\,(qz_{\prime} - ry_{\prime}) + \beta\,(rx_{\prime} - pz_{\prime}) + \gamma\,(py_{\prime} - qx_{\prime}),\\ v &= \frac{dy}{dt} + \alpha'(qz_{\prime} - ry_{\prime}) + \beta'(rx_{\prime} - pz_{\prime}) + \gamma'(py_{\prime} - qx_{\prime}),\\ w &= \frac{dz}{dt} + \alpha''(qz_{\prime} - ry_{\prime}) + \beta''(rx_{\prime} - pz_{\prime}) + \gamma''(py_{\prime} - qx_{\prime}), \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

pour les valeurs complètes de u, v, w, dans lesquelles les neuf quantités α, β, etc., sont les cosinus des angles que font les axes mobiles $Gx_{\prime}$, $Gy_{\prime}$, $Gz_{\prime}$, avec les droites parallèles aux axes fixes des x, y, z, et menées par le point G; en sorte que l'on ait, au bout du temps t quelconque,

$$\begin{aligned} \cos x_{\prime}Gx &= \alpha, & \cos y_{\prime}Gx &= \beta, & \cos z_{\prime}Gx &= \gamma,\\ \cos x_{\prime}Gy &= \alpha', & \cos y_{\prime}Gy &= \beta', & \cos z_{\prime}Gy &= \gamma',\\ \cos x_{\prime}Gz &= \alpha'', & \cos y_{\prime}Gz &= \beta'', & \cos z_{\prime}Gz &= \gamma''. \end{aligned}$$

Ces neuf cosinus seront des fonctions de t, qui s'exprimeront par des formules connues, au moyen des trois angles ψ, φ, θ, et seront liés entre eux par les six équations

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 &= 1,\\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 &= 1,\\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1,\\ \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' &= 0,\\ \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' &= 0,\\ \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

que l'on pourra, si l'on veut, remplacer par ces six autres, qui leur sont équivalentes,

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1,\\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1,\\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1,\\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0,\\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0,\\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Soient aussi $u_{,}$, $v_{,}$, $w_{,}$, les composantes de la vitesse complète de M, parallèles aux axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$; nous aurons

$$u_{,} = \alpha u + \alpha' v + \alpha'' w,$$
$$v_{,} = \beta u + \beta' v + \beta'' w,$$
$$w_{,} = \gamma u + \gamma' v + \gamma'' w;$$

et si l'on fait, pour abréger,

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \frac{dx}{dt} + \alpha' \frac{dy}{dt} + \alpha'' \frac{dz}{dt} = x', \\ \beta \frac{dx}{dt} + \beta' \frac{dy}{dt} + \beta'' \frac{dz}{dt} = y', \\ \gamma \frac{dx}{dt} + \gamma' \frac{dy}{dt} + \gamma'' \frac{dz}{dt} = z', \end{array}\right\} \quad (13)$$

et que l'on ait égard aux équations (10) et (11), on en conclura

$$\left.\begin{array}{l} u_{,} = x' + qz_{,} - ry_{,}, \\ v_{,} = y' + rx_{,} - pz_{,}, \\ w_{,} = z' + py_{,} - qx_{,}. \end{array}\right\} \quad (14)$$

On peut remarquer que x', y', z', sont les composantes de la vitesse du mouvement de translation, parallèles aux axes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$; par les règles de la composition des vitesses, qui sont les mêmes que celles de la composition des forces, on aura réciproquement

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ \frac{dy}{dt} = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ \frac{dz}{dt} = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z', \end{array}\right\} \quad (15)$$

pour les composantes de cette même vitesse, parallèles aux axes des x, y, z; ce qui se déduit également de la combinaison des équations (12) et (13).

Observons aussi que les angles λ, μ, ν, et $\lambda_{,}$, $\mu_{,}$, $\nu_{,}$, répondant à une même droite MN et à deux systèmes différents d'axes rectangulaires, on aura, d'après une formule connue,

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \alpha\cos\lambda_{,} + \beta\cos\mu_{,} + \gamma\cos\nu_{,}, \\ \cos\mu &= \alpha'\cos\lambda_{,} + \beta'\cos\mu_{,} + \gamma'\cos\nu_{,}, \\ \cos\nu &= \alpha''\cos\lambda_{,} + \beta''\cos\mu_{,} + \gamma''\cos\nu_{,}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

(8). D'après ce que représentent $u_{,}$, $v_{,}$, $w_{,}$, ainsi que $\lambda_{,}$, $\mu_{,}$, $\nu_{,}$, la vitesse normale V aura pour expression

$$V = u_{,}\cos\lambda_{,} + v_{,}\cos\mu_{,} + w_{,}\cos\nu_{,},$$

ou bien, en vertu des équations (14),

$$\begin{aligned} V = {} & x'\cos\lambda_{,} + y'\cos\mu_{,} + z'\cos\nu_{,} \\ & + (qz_{,} - ry_{,})\cos\lambda_{,} + (rx_{,} - pz_{,})\cos\mu_{,} + (py_{,} - qx_{,})\cos\nu_{,}; \end{aligned} \quad (17)$$

et cette formule, jointe aux équations (5), (13), (16), fera connaître la vitesse V et ses composantes $V\cos\lambda_{,}$, $V\cos\mu_{,}$, $V\cos\nu_{,}$, ou $V\cos\lambda$, $V\cos\mu$, $V\cos\nu$, qu'on devra employer dans les formules (7).

La vitesse complète du point M ayant été décomposée en deux autres V et V', les sommes des composantes de celles-ci, parallèles aux axes fixes, doivent être égales à u, v, w; d'où il résulte

$$\left.\begin{aligned} u &= V\cos\lambda + V'\cos\lambda', \\ v &= V\cos\mu + V'\cos\mu', \\ w &= V\cos\nu + V'\cos\nu'; \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

ce qui fera connaître les composantes $V'\cos\lambda'$, $V'\cos\mu'$, $V'\cos\nu'$, de V', au moyen de celles de V et des formules (10). Relativement aux axes mobiles, on aura de même

$$\left.\begin{aligned} u_{,} &= V\cos\lambda_{,} + V'\cos\lambda'_{,}, \\ v_{,} &= V\cos\mu_{,} + V'\cos\mu'_{,}, \\ w_{,} &= V\cos\nu_{,} + V'\cos\nu'_{,}, \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

pour déterminer les composantes $V' \cos \lambda'_{,}$, $V' \cos \mu'_{,}$, $V' \cos \nu'_{,}$ au moyen de celles de V et des formules (13) et (14).

Après avoir substitué dans les formules (7), les expressions des diverses composantes de V et V', et avoir fait sortir hors des signes $\int$ et $\int_{,}$ les quantités communes à tous les points du mobile, savoir, les vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, p, q, r, et les neuf cosinus α, 6, etc., on aura les expressions de X, Y, Z, $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, qu'il s'agissait d'obtenir. Mais leur extrême complication rendra tout-à-fait impossible l'intégration générale des équations du double mouvement de translation et de rotation du projectile; et pour parvenir à des résultats utiles, il faudra se borner à considérer les cas les plus simples, soit relativement à la forme de ce corps, soit par rapport à son mouvement de rotation. C'est ce que nous ferons dans les paragraphes suivants.

---

§ II. *Influence du frottement de l'air sur les mouvements de translation et de rotation du projectile.*

(9). On supposera que le mobile soit composé de couches sphériques et concentriques, dont chacune a la même densité dans toute son étendue, qui pourra varier d'une manière quelconque, d'une couche à une autre; ce qui comprend le cas d'une sphère pleine et homogène, et celui d'une sphère creuse dont la partie pleine a partout la même épaisseur.

Le centre de figure de ce corps sera son centre de gravité G; tous ses diamètres étant des axes principaux, on pourra prendre trois rayons rectangulaires quelconques, pour les trois demi-axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, pourvu qu'ils soient les mêmes, ou qu'ils aboutissent aux trois mêmes points de la surface, pendant toute la durée du mouvement. En désignant par l la longueur du demi-diamètre, on aura, d'après les équations (5),

$$\cos \lambda_{,} = \frac{x_{,}}{l}, \quad \cos \mu_{,} = \frac{y_{,}}{l}, \quad \cos \nu_{,} = \frac{z_{,}}{l}; \qquad (a)$$

et les angles $\lambda_{,}$, $\mu_{,}$, $\nu_{,}$, seront ceux que fait le rayon GM, aboutissant au point quelconque M de la snrface, avec les demi-axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$.

Ces valeurs de leurs cosinus font disparaître de l'équation (17), les composantes p, q, r, de la vitesse de rotation, et l'ón a simplement

$$V = \frac{1}{l}(x'x_{,} + y'y_{,} + z'z_{,}). \qquad (b)$$

L'équation (6) devient donc

$$x_{,}x' + y_{,}y' + z_{,}z' = 0:$$

elle appartient à un plan passant par le point G ; et comme les quantités x', y', z', sont les composantes suivant les axes des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, de la vitesse du mouvement de translation (n° 7), on en conclut que ce plan est perpendiculaire à la direction de cette vitesse. Ainsi, les parties antérieure et postérieure du projectile seront les deux hémisphères déterminés par le plan mené par son centre G, perpendiculairement à la trajectoire de ce point dans l'espace; en sorte que ce sera à l'hémisphère antérieur que devront s'étendre les intégrales indiquées par $\int_{,}$ dans les formules (7).

Pour qne les autres intégrales que ces formules renferment s'étendent à la surface entière du projectile, je supposerai que dans sa partie postérieure, la vitesse V ne devienne jamais plus grande que k, abstraction faite du signe. Je supposerai aussi la surface également polie dans toute son étendue, afin que le nombre n' et la vitesse k soient les mêmes en tous ses points. Après qu'on aura fait sortir hors des signes $\int$, les quantités communes à tous les points de la surface et variables avec le temps, ces intégrales seront des quantités constantes, faciles à calculer et dont plnsieurs se réduisent à zéro. Cette constance

n'aurait pas lieu, si la quantité $k+V$ pouvait devenir zéro : la courbe déterminée par l'équation (9), sur la partie postérieure de la surface, et d'où dépendent les intégrales $\int$, serait alors un petit cercle perpendiculaire à la direction du mouvement de translation, qui pourrait s'approcher ou s'éloigner du centre, selon que la vitesse V augmenterait ou diminuerait pendant la durée du mouvement ; ce qui rendrait ces intégrales variables avec le temps t à raison de leurs limites, et compliquerait beaucoup la question.

(10). Les valeurs de $\cos\lambda_{,}$, $\cos\mu_{,}$, $\cos\nu_{,}$, données par les formules (a), rendront nuls les coefficients de $V^2 d\sigma$ sous les signes $\int_{,}$ dans les trois dernières formules (7) ; et ces mêmes valeurs, jointes aux équations (19), réduiront ces formules à celles-ci :

$$X_{,} = \int(v_{,}z_{,} - w_{,}y_{,})\rho d\sigma,$$
$$Y_{,} = \int(w_{,}x_{,} - u_{,}z_{,})\rho d\sigma,$$
$$Z_{,} = \int(u_{,}y_{,} - v_{,}x_{,})\rho d\sigma,$$

qui deviendront

$$X_{,} = n'Dk\int(v_{,}z_{,} - w_{,}y_{,})\,d\sigma + n'D\int(v_{,}z_{,} - w_{,}y_{,})V d\sigma,$$
$$Y_{,} = n'Dk\int(w_{,}x_{,} - u_{,}z_{,})\,d\sigma + n'D\int(w_{,}x_{,} - u_{,}z_{,})V d\sigma,$$
$$Z_{,} = n'Dk\int(u_{,}y_{,} - v_{,}x_{,})\rho d\sigma + n'D\int(u_{,}y_{,} - v_{,}x_{,})V d\sigma,$$

en vertu de l'équation (8), et en observant qu'on vient de supposer que n' et k sont des constantes.

J'y substitue pour $u_{,}$, $v_{,}$, $w_{,}$, les formules (14), et pour V la formule (b). Les intégrales $\int$ s'étendant, par hypothèse, à la surface entière du mobile, qui est celle d'une sphère, on a évidemment

$$\int x_{,}d\sigma = 0, \quad \int y_{,}d\sigma = 0, \quad \int z_{,}\,d\sigma = 0,$$
$$\int x_{,}y_{,}d\sigma = 0, \quad \int z_{,}x_{,}d\sigma = 0, \quad \int y_{,}z_{,}d\sigma = 0, \quad \int x_{,}y_{,}z_{,}d\sigma = 0,$$
$$\int x_{,}^2 y_{,}d\sigma = 0, \quad \int z_{,}^2 x_{,}d\sigma = 0, \quad \int y_{,}^2 z_{,}d\sigma = 0,$$
$$\int x_{,}y_{,}^2 d\sigma = 0, \quad \int z_{,}x_{,}^2 d\sigma = 0, \quad \int y_{,}z_{,}^2 d\sigma = 0.$$

En désignant à l'ordinaire par π le rapport de la circonférence au diamètre, de sorte que la surface de la sphère soit $4\pi l^2$, on aura aussi

$$\int (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) d\sigma = 4\pi l^4;$$

de plus les trois intégrales $\int x_i^2 d\sigma$, $\int y_i^2 d\sigma$, $\int z_i^2 d\sigma$, seront égales entre elles; chacune d'elles sera, par conséquent, égale au tiers de leur somme; et il s'ensuivra

$$\int x_i^2 d\sigma = \frac{4\pi l^4}{3}, \int y_i^2 d\sigma = \frac{4\pi l^4}{3}, \int z_i^2 d\sigma = \frac{4\pi l^4}{3}.$$

De cette manière, on trouvera

$$\begin{aligned}
\int (v_i z_i - w_i y_i) d\sigma &= -\frac{8\pi p l^4}{3}, \\
\int (w_i x_i - u_i y_i) d\sigma &= -\frac{8\pi q l^4}{3}, \\
\int (u_i y_i - v_i x_i) d\sigma &= -\frac{8\pi r l^4}{3}, \\
\int (v_i z_i - w_i y_i) V d\sigma &= 0, \\
\int (w_i x_i - u_i y_i) V d\sigma &= 0, \\
\int (u_i y_i - v_i x_i) V d\sigma &= 0;
\end{aligned}$$

d'où il résultera finalement

$$X_i = -\frac{8\pi n' D k l^4}{3} p, \ Y_i = -\frac{8\pi n' D k l^4}{3} q, \ Z_i = -\frac{8\pi n' D k l^4}{3} r. \quad (c)$$

Le calcul des valeurs de X, Y, Z, est beaucoup plus compliqué, et le résultat moins simple. Nous le diviserons en deux parties : l'une relative aux termes qui dépendent des intégrales $\int$, l'autre aux termes dépendants des intégrales $\int_i$; et nous commencerons par la première de ces deux parties.

(11). En vertu des équations (8) et (18), on a d'abord

$$\int \rho V' \cos\lambda' d\sigma = n' D\left(k\int u d\sigma - k\int V \cos\lambda d\sigma + \int uV d\sigma - \int V^2 \cos\lambda d\sigma\right),$$
$$\int \rho V' \cos\mu' d\sigma = n' D\left(k\int v d\sigma - k\int V \cos\mu d\sigma + \int vV d\sigma - \int V^2 \cos\mu d\sigma\right),$$
$$\int \rho V' \cos\nu' d\sigma = n' D\left(k\int w d\sigma - k\int V \cos\nu d\sigma + \int wV d\sigma - \int V^2 \cos\nu d\sigma\right).$$

D'après la valeur de V et les formules (16), les quantités $V^2 \cos\lambda d\sigma$, $V^2 \cos\mu d\sigma$, $V^2 \cos\nu d\sigma$, ne referment que des termes dont chacun est de dimension impaire par rapport à $x_,$, $y_,$, $z_,$, et dont les intégrales, étendues à toute la surface sphérique sont par conséquent nulles; en sorte que l'on a

$$\int V^2 \cos\lambda d\sigma = 0, \quad \int V^2 \cos\mu d\sigma = 0, \quad \int V^2 \cos\nu d\sigma = 0.$$

En supprimant de même les termes dont les intégrales sont nulles, on déduit immédiatement, des formnles (10) et de la surface $4\pi l^2$ de la sphère,

$$\int u d\sigma = 4\pi l^2 \frac{dx}{dt}, \quad \int v d\sigma = 4\pi l^2 \frac{dy}{dt}, \quad \int = w d\sigma 4\pi l^2 \frac{dz}{dt}.$$

En ayant égard, de plus, à la valeur des intégrales $\int x_,^2 d\sigma$, $\int y_,^2 d\sigma$, $\int z_,^2 d\sigma$, et aux équations (15), on trouve aussi

$$\int V \cos\lambda d\sigma = \frac{4\pi l^3}{3} \frac{dx}{dt}, \quad \int V \cos\mu d\sigma = \frac{4\pi l^3}{3} \frac{dy}{dt}, \quad \int V \cos\nu d\sigma = \frac{4\pi l^3}{3} \frac{dz}{dt}.$$

On obtient de même, sans difficulté,

$$\int u V d\sigma = \frac{4\pi l^3}{3} \left[(\beta x' - \alpha y')r + (\alpha z' - \gamma x')q + (\gamma y' - \beta z')p\right],$$
$$\int v V d\sigma = \frac{4\pi l^3}{3} \left[(\beta' x' - \alpha' y')r + (\alpha' z' - \gamma' x')q + (\gamma' y' - \beta' z')p\right],$$
$$\int w V d\sigma = \frac{4\pi l^3}{3} \left[(\beta'' x' - \alpha'' y')r + (\alpha'' z' - \gamma'' x')q + (\gamma'' y' - \beta'' z')p\right].$$

En mettant les formules (13) à la place de x', y', z', il vient

$$
\begin{aligned}
\beta x' - \alpha y' &= (\beta\alpha' - \alpha\beta')\frac{dy}{dt} + (\beta\alpha'' - \alpha\beta'')\frac{dz}{dt},\\
\alpha z' - \gamma x' &= (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')\frac{dy}{dt} + (\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'')\frac{dz}{dt},\\
\gamma y' - \beta z' &= (\gamma\beta' - \beta\gamma')\frac{dy}{dt} + (\gamma\beta'' - \beta\gamma'')\frac{dz}{dt},\\
\beta' x' - \alpha' y' &= (\beta'\alpha'' - \alpha'\beta'')\frac{dz}{dt} + (\beta'\alpha - \alpha'\beta)\frac{dx}{dt},\\
\alpha' z' - \gamma' x' &= (\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha'')\frac{dz}{dt} + (\alpha'\gamma - \gamma'\alpha)\frac{dx}{dt},\\
\gamma' y' - \beta' z' &= (\gamma'\beta'' - \beta'\gamma'')\frac{dz}{dt} + (\gamma'\beta - \beta'\gamma)\frac{dx}{dt},\\
\beta'' x' - \alpha'' y' &= (\beta''\alpha - \alpha''\beta)\frac{dx}{dt} + (\beta''\alpha' - \alpha''\beta')\frac{dy}{dt},\\
\alpha'' z' - \gamma'' x' &= (\alpha''\gamma - \gamma''\alpha)\frac{dx}{dt} + (\alpha''\gamma' - \gamma''\alpha')\frac{dy}{dt},\\
\gamma'' y' - \beta'' z' &= (\gamma''\beta - \beta''\gamma)\frac{dx}{dt} + (\gamma''\beta' - \beta''\gamma')\frac{dy}{dt};
\end{aligned}
$$

or, d'après certaines formules dont j'ai fait usage dans d'autres mémoires, on a

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \beta'\gamma'' - \beta''\gamma', & \beta &= \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha', & \gamma &= \alpha'\beta'' - \alpha''\beta',\\
\alpha' &= \beta''\gamma - \beta\gamma'', & \beta' &= \gamma''\alpha - \gamma\alpha'', & \gamma' &= \alpha''\beta - \alpha\beta'',\\
\alpha'' &= \beta\gamma' - \beta'\gamma, & \beta'' &= \gamma\alpha' - \gamma'\alpha, & \gamma'' &= \alpha\beta' - \alpha'\beta;
\end{aligned}
$$

et au moyen de ces neuf équations (*), jointes aux neuf précédentes, on aura

$$\int u V d\sigma = \frac{4\pi l^3}{3}\mathrm{P}, \quad \int v V d\sigma = \frac{4\pi l^3}{3}\mathrm{Q}, \quad \int w V d\sigma = \frac{4\pi l^3}{3}\mathrm{R},$$

(*) Elles se déduiront de celles qui sont démontrées dans le n° 6 de mon Mémoire sur le *Mouvement de rotation d'un corps solide* (tome XIV des *Mémoires de l'Académie des Sciences*), en faisant dans celles-ci $a = \alpha$, $b = \alpha'$, $c = \alpha''$, $a' = \beta$, $b' = \beta'$, $c' = \beta''$, $a'' = \gamma$, $b'' = \gamma'$, $c'' = \gamma''$.

où l'on a fait, pour abréger,

$$\left(\alpha'\frac{dz}{dt}-\alpha''\frac{dy}{dt}\right)p+\left(\mathcal{C}'\frac{dz}{dt}-\mathcal{C}''\frac{dy}{dt}\right)q+\left(\gamma'\frac{dz}{dt}-\gamma''\frac{dy}{dt}\right)r=\mathrm{P},$$
$$\left(\alpha''\frac{dx}{dt}-\alpha\frac{dz}{dt}\right)p+\left(\mathcal{C}''\frac{dx}{dt}-\mathcal{C}\frac{dz}{dt}\right)q+\left(\gamma''\frac{dx}{dt}-\gamma\frac{dz}{dt}\right)r=\mathrm{Q},$$
$$\left(\alpha\frac{dy}{dt}-\alpha'\frac{dx}{dt}\right)p+\left(\mathcal{C}\frac{dy}{dt}-\mathcal{C}'\frac{dx}{dt}\right)q+\left(\gamma\frac{dy}{dt}-\gamma'\frac{dx}{dt}\right)r=\mathrm{R}.$$

De ces diverses parties des intégrales indiquées par $\int$, on déduit, pour leurs valeurs complètes,

$$\left.\begin{aligned}\int\rho\mathrm{V}'\cos\lambda' d\sigma &= \frac{8\pi n' l^3 \mathrm{D}}{3}\left(k\frac{dx}{dt}+\frac{1}{2}l\mathrm{P}\right),\\ \int\rho\mathrm{V}'\cos\mu' d\sigma &= \frac{8\pi n' l^3 \mathrm{D}}{3}\left(k\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}l\mathrm{Q}\right),\\ \int\rho\mathrm{V}'\cos\nu' d\sigma &= \frac{8\pi n' l^3 \mathrm{D}}{3}\left(k\frac{dz}{dt}+\frac{1}{2}l\mathrm{R}\right).\end{aligned}\right\}\quad (d)$$

(12). Pour déterminer les intégrales indiquées par $\int$, dans les expressions de X, Y, Z, et qui se rapportent à l'hémisphère antérieur du projectile, je mène par le point G trois demi-axes rectangulaires GH, GH', GH'', dont le premier soit tangent à la trajectoire de ce point et dirigé dans le sens de son mouvement, et dont les deux autres se trouvent, par conséquent, dans le plan du grand cercle qui termine cet hémisphère. Soit ζ l'angle HGM compris entre GH et le rayon GM du point quelconque M de la surface; soit aussi n l'angle que fait la projection de GM sur le plan des deux autres demi-axes avec GH'; nous aurons, comme on sait,

$$\cos \mathrm{HGM}=\cos\zeta,\quad \cos \mathrm{H'GM}=\sin\zeta\cos n,\quad \cos \mathrm{H''GM}=\sin\zeta\sin n.$$

D'après une formule connue, les cosinus des angles λ, μ, ν, que fait ce même rayon GM avec des parallèles aux axes des x, y, z, menées par le point G, pourront s'exprimer ainsi :

$$\begin{aligned}\cos\lambda &= h\cos\zeta + h'\sin\zeta\cos n + h''\sin\zeta\sin n,\\ \cos\mu &= h_1\cos\zeta + h'_1\sin\zeta\cos n + h''_1\sin\zeta\sin n,\\ \cos\nu &= h_2\cos\zeta + h'_2\sin\zeta\cos n + h''_2\sin\zeta\sin n,\end{aligned}$$

où l'on désigne les cosinus des angles que font ces parallèles, par h, h_1, h_2, avec GH, par h', h'_1, h'_2, avec GH', par h'', h''_1, h''_2, avec GH''. Si l'on appelle s l'arc de la trajectoire du point G, compté d'un point fixe sur cette courbe, et aboutissant à la position de G au bout du temps t, les trois premiers cosinus auront pour valeurs

$$h = \frac{dx}{ds}, \quad h_1 = \frac{dy}{ds}, \quad h_2 = \frac{dz}{ds};$$

ce qui suppose la différentielle ds positive dans toute l'étendue de la trajectoire. Quant aux six autres, ils dépendront de la direction arbitraire de GH' et GH'' dans le plan perpendiculaire à la courbe, et nous n'aurons pas besoin d'en connaître les valeurs.

La vitesse du point G ou du mouvement de translation, sera $\frac{ds}{dt}$; et comme d'après l'équation (b), et ce que x', y', z', représentent (n° 7), la composante normale V de la vitesse complète de M ne dépend que de ce mouvement, on aura simplement

$$V = \frac{ds}{dt}\cos\zeta.$$

Il en résultera donc

$$\begin{aligned}
\int_{\prime} V^2 \cos\lambda d\sigma &= \frac{ds^2}{dt^2}\Big(h\int_{\prime}\cos^3\zeta d\sigma + h'\int_{\prime}\cos^2\zeta\sin\zeta\cos n\, d\sigma \\
&\qquad + h''\int_{\prime}\cos^2\zeta\sin\zeta\sin n\, d\sigma\Big),\\
\int_{\prime} V^2 \cos\mu d\sigma &= \frac{ds^2}{dt^2}\Big(h_1\int_{\prime}\cos^3\zeta d\sigma + h'_1\int_{\prime}\cos^2\zeta\sin\zeta\cos n\, d\sigma \\
&\qquad + h''_1\int_{\prime}\cos^2\zeta\sin\zeta\sin n\, d\sigma\Big),\\
\int_{\prime} V^2 \cos\nu d\sigma &= \frac{ds^2}{dt^2}\Big(h_2\int_{\prime}\cos^3\zeta d\sigma + h'_2\int_{\prime}\cos^2\zeta\sin\zeta\cos n\, d\sigma \\
&\qquad + h''_2\int_{\prime}\cos^2\zeta\sin\zeta\sin n\, d\sigma\Big).
\end{aligned}$$

L'élément différentiel $d\sigma$ de la surface sphérique aura d'ailleurs pour expression

$$d\sigma = l^2 \sin \zeta d\zeta d\eta.$$

Pour étendre les trois intégrales $\int_{,}$ à toute la surface de l'hémisphère antérieur, il faudra les prendre depuis $\zeta = 0$ et $\eta = 0$ jusqu'à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$ et $\eta = 2\pi$; ce qui rendra nulles les deux dernières intégrales contenues dans chacune des équations précédentes : on aura en outre

$$\int_{,} \cos^3 \zeta d\sigma = l^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \cos^3 \zeta \sin \zeta d\zeta d\eta = \frac{1}{2}\pi l^2;$$

et, en ayant égard aux valeurs de h, h_1, h_2, il en résultera

$$\left.\begin{aligned} \int_{,} V^2 \cos \lambda d\sigma &= \frac{1}{2}\pi l^2 \frac{dx}{dt} \frac{ds}{dt}, \\ \int_{,} V^2 \cos \mu d\sigma &= \frac{1}{2}\pi l^2 \frac{dy}{dt} \frac{ds}{dt}, \\ \int_{,} V^2 \cos \nu d\sigma &= \frac{1}{2}\pi l^2 \frac{dz}{dt} \frac{ds}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

Ces quantités, multipliées par $-n$D, sont les composantes de la résistance proprement dite du fluide sur un hémisphère : leur résultante est dirigée suivant le prolongement de GH, et égale à $\frac{1}{2} n\pi l^2 \mathrm{D} \frac{ds^2}{dt^2}$, c'est-à-dire à la moitié de la résistance qui aurait lieu sur le grand cercle perpendiculaire à GH, comme on le trouve ordinairement.

(10). Au moyen des formules (*d*) et (*e*), les trois premières équations (7) deviendront

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{1}{2} n\pi l^2 \mathrm{D} \frac{dx}{dt} \frac{ds}{dt} - \frac{8}{3} n'\pi l^2 \mathrm{D} k \frac{dx}{dt} - \frac{4}{3} n'\pi l^3 \mathrm{DP}, \\ Y &= -\frac{1}{2} n\pi l^2 \mathrm{D} \frac{dy}{dt} \frac{ds}{dt} - \frac{8}{3} n'\pi l^2 \mathrm{D} k \frac{dy}{dt} - \frac{4}{3} n'\pi l^3 \mathrm{DQ}, \\ Z &= -\frac{1}{2} n\pi l^2 \mathrm{D} \frac{dz}{dt} \frac{ds}{dt} - \frac{8}{3} n'\pi l^2 \mathrm{D} k \frac{dz}{dt} - \frac{4}{3} n'\pi l^3 \mathrm{DR}. \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

On aurait pu simplifier les calculs qui nous ont conduits à ces résultats, en faisant usage des *permutations tournantes* indiquées précédemment (n° 2), et les appliquant successivement aux axes des

x, y, z, et à ceux des $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ il aurait suffi de calculer directement un des trois termes de l'une des quantités P, Q, R; les deux autres termes s'en seraient déduits; et de même deux des trois quantités X, Y, Z, se seraient aussi déduites de la troisième.

En effet, considérons ces deux lignes de quantités :

$$p,\ q,\ r,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \alpha'',\ \beta'',\ \gamma'',$$
$$r,\ p,\ q,\ \gamma,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma',\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'',\ \alpha'',\ \beta''.$$

Les axes des x, y, z, restant les mêmes, supposons que ceux des $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, tournent autour du point G, de manière que $Gx_{,}$ aille prendre la place de $Gy_{,}$, $Gy_{,}$ celle de $Gz_{,}$, et $Gz_{,}$ celle de $Gx_{,}$; il faudra, d'après le genre de permutations dont il s'agit, changer chacune des quantités de la ligne supérieure dans la quantité correspondante de la ligne inférieure; et de cette manière, le premier terme de chacune des quantités P, Q, R, se changera dans le troisième, celui-ci dans le second, et le second dans le premier.

Considérons de même ces deux autres lignes de quantités :

$$x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \beta,\ \beta',\ \beta'',\ \gamma,\ \gamma',\ \gamma'',$$
$$z,\ x,\ y,\ \alpha'',\ \alpha,\ \alpha',\ \beta'',\ \beta,\ \beta',\ \gamma'',\ \gamma,\ \gamma'.$$

Si l'on suppose que les axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, demeurant les mêmes, ceux des x, y, z, savoir Ox, Oy, Oz, tournent autour du point O, de telle sorte que Ox vienne prendre la place de Oy, Oy celle de Oz, et Oz celle de Ox, il faudra changer chacune des quantités de la ligne supérieure, dans la quantité correspondante de la ligne inférieure; au moyen de quoi P, Q, R, deviendront respectivement R, Q, P, puis la première des formules (f) se changera dans la troisième, celle-ci dans la seconde, et cette dernière dans la première.

(14). En vertu des formules (c), les équations (3) du mouvement de rotation, ne dépendront pas des inconnues x, y, z, relatives au

mouvement de translation, et le premier mouvement sera le même que si le second n'existait pas, ou que le centre G fût un point fixe; au contraire, d'après les formules (f), les équations (2) du mouvement de translation renfermeront les angles ψ, φ, θ, et les vitesses p, q, r, qui se rapportent à la rotation du mobile; en sorte que ce second mouvement influera sur le premier. C'est pourquoi nous nous occuperons d'abord de l'intégration des formules relatives au mouvement de rotation, et de la détermination de ce mouvement.

Les trois moments d'inertie A, B, C, du projectile sont égaux, dans le cas que nous considérons (n° 9); si, de plus, ce corps est une couche sphérique, d'une épaisseur et d'une densité constantes, et qu'on représente par D' cette densité, et par l et l' les rayons extérieur et intérieur de la couche, on aura

$$\frac{8}{15}\pi D'(l^5 - l'^5),$$

pour la valeur commune à A, B, C. En faisant donc, pour abréger,

$$\frac{5n'Dkh^4}{3D'(l^5 - l'^5)} = \lambda,$$

et en mettant les formules (c) à la place de $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, dans les équations (3), elles deviendront

$$dr = -\lambda r dt, \quad dq = -\lambda q dt, \quad dp = -\lambda p dt.$$

La lettre λ représentera actuellement une constante positive qui doit être une vitesse divisée par une ligne, comme on le voit par son expression, et comme il est nécessaire pour l'homogénéité de ces équations. En les intégrant et désignant par a, b, c, les constantes arbitraires, on aura

$$p = ae^{-\lambda t}, \quad q = be^{-\lambda t}, \quad r = ce^{-\lambda t};$$

e étant, à l'ordinaire, la base des logarithmes népériens.

D'après ces valeurs de p, q, r, les angles que fait l'axe instantané OI avec les trois rayons $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, seront constants (n° 2); par conséquent, le projectile tournera uniformément et dans le même sens, autour d'un même diamètre qui sera donné à l'origine du mouvement. Si l'on prend l'une de ses parties pour le demi-axe $Gz_{,}$, que l'on peut choisir arbitrairement, on aura $p=0$ et $q=0$, pour $t=0$; il en résultera $a=0$ et $b=0$; ce qui rendra nulles les deux composantes p et q pendant toute la durée du mouvement, et la vitesse de rotation ω égale à $\pm r$, selon que la troisième composante r sera positive ou négative, c'est-à-dire, selon que le mouvement autour de $Gz_{,}$, aura lieu de $Gx_{,}$ vers $Gy_{,}$, ou de $Gy_{,}$ vers $Gx_{,}$ (n° 2). Cette vitesse ω décroîtra en progression géométrique, pour des accroissements égaux du temps t, et d'autant plus rapidement que la constante λ sera plus grande; sa grandeur initiale et le sens donné du mouvement, feront connaître la valeur et le signe de la constante c.

Dans tout corps solide, lorsque l'axe instantané de rotation est fixe dans son intérieur, ou constamment formé des mêmes points du mobile, cette droite demeure aussi constamment parallèle à elle-même pendant le mouvement de translation. C'est, en effet, ce que l'on peut vérifier en faisant $p=0$ et $q=0$, dans les deux premières équations (1). Elles deviennent alors

$$\sin\theta \sin\varphi d\psi = \cos\varphi d\theta, \quad \sin\theta\cos\varphi d\psi = -\sin\varphi d\theta;$$

d'où l'on conclut $d\psi=0$ et $d\theta=0$: la section du corps qui renferme les axes $Gx_{,}$ et $Gy_{,}$ restera donc constamment parallèle à elle-même; et, conséquemment, l'axe de rotation $Gz_{,}$, perpendiculaire à cette section, conservera aussi toujours son parallélisme.

Je fais $d\psi=0$ dans la dernière équation (1), et j'y mets pour r sa valeur. En intégrant ensuite, il vient

$$\varphi = c' - \frac{c}{\lambda}e^{-\lambda t};$$

c' étant la constante arbitraire. Le troisième angle ψ sera donc variable; mais il tendra de plus en plus à devenir constant, et égal à c'; valeur qu'il atteindrait rigoureusement au bout d'un temps infini. Comme on peut choisir arbitrairement le rayon $Gx_{,}$, auquel cet angle répond, si l'on suppose que ce soit le rayon qui coïncidait à l'origine du mouvement avec la droite horizontale GL, à partir de laquelle on compte l'angle φ, on aura $\varphi = 0$ pour $t = 0$, d'où il résultera $c' = \frac{c}{\lambda}$, et par conséquent,

$$\varphi = \frac{c}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}),$$

à un instant quelconque.

(15). On supposera, pour fixer les idées, que la partie de l'intersection du plan de $Gx_{,}$ et $Gy_{,}$, avec le plan horizontal mené par le point G, qui sera prise pour GL, soit celle qui aboutit à ce qu'on appellerait, en astronomie, le *nœud ascendant* du plan incliné, de sorte que les points du mobile, après avoir atteint le point L, s'élèvent ensuite au-dessus du plan horizontal. L'angle constant ψ sera donné dans chaque cas sans ambiguïté, si toutefois le plan de $Gx_{,}$ et $Gy_{,}$ n'est pas horizontal, ce qui rendrait l'intersection GL indéterminée. A l'origine du mouvement, le demi-axe $Gy_{,}$ fera un angle droit avec GL, puisque la valeur initiale de φ est supposée nulle, et, de plus, $Gy_{,}$ tombera dans la partie supérieure du plan incliné (n° 1); la rotation aura donc lieu de GL ou $Gx_{,}$ vers $Gy_{,}$, ce qui rendra la constante c positive. Enfin l'angle constant θ sera aussi donné dans chaque cas; il sera obtus ou aigu, selon qu'à l'origine du mouvement, l'angle dièdre formé par l'angle droit $LGy_{,}$ et l'angle ψ, ou LGx' compté vers la droite à partir de $Gx_{,}$, surpassera $90°$ ou sera moindre, ce qui dépendra du sens de la rotation. Dans le cas de l'angle aigu, $Gz_{,}$ sera la partie de la normale au plan de $Gx_{,}$ et $Gy_{,}$, qui tombe au-dessus du plan horizontal, et dans le cas de l'angle obtus, celle qui tombe au-dessous.

Lorsqu'on aura $\theta = 90°$, le corps tournera autour d'un axe horizontal; si, en outre, cet axe est perpendiculaire au plan vertical des x et z, qui contient la direction de la vitesse initiale du point G, il pourra arriver que le nœud ascendant L appartienne à la partie antérieure du mobile, ou à sa partie postérieure : dans le premier cas, on aura $\psi = 0$, et dans le second $\psi = 180°$. Si la rotation a lieu autour de la droite Gx, on aura $\psi = 90°$ ou $\psi = 270°$, selon que le nœud L appartiendra à l'hémisphère du mobile, situé à droite ou situé à gauche du plan de Gx et Gz. Quand le projectile tournera autour d'un axe vertical, la droite GL sera indéterminée. Je supposerai arbitrairement qu'on prenne pour cette droite, origine de l'angle φ, le prolongement de l'axe Gy. Si l'on veut alors que la constante c soit encore positive, ou que le mouvement ait lieu de $Gx_{,}$ vers $Gy_{,}$, il faudra qu'en prenant toujours pour $Gx_{,}$, le rayon qui coïncide avec GL, quand $t = 0$, on prenne pour $Gy_{,}$ celui qui coïncide à la même époque, soit avec le prolongement de Gx, quand la rotation de la partie antérieure du mobile aura lieu de gauche à droite, soit avec Gx, quand cette partie tournera de droite à gauche: dans le premier cas, l'angle dièdre des deux angles $LGy_{,}$ et LGx sera égal à $180°$, le demi-axe $Gz_{,}$ coïncidera avec le prolongement de Gz, et l'on aura $\theta = 180°$; dans le second cas, cet angle dièdre sera nul, $Gz_{,}$ coïncidera avec Gz, et l'on aura $\theta = 0$.

Toutes ces conventions sont conformes à celles qui ont déjà été faites dans les nos 1 et 2, auxquelles nous ajoutons actuellement l'hypothèse que la droite GL, fixe sur le plan horizontal dans le cas que nous considérons, soit dirigée vers le nœud ascendant du plan de $Gx_{,}$ et $Gy_{,}$, quand ce plan est incliné, et, lorsqu'il est horizontal, les conditions nécessaires pour que la constante c et la vitesse r soient encore des quantités positives.

(15). En faisant $p = 0$ et $q = 0$ dans les valeurs de P, Q, R, du no 11, elles se réduisent à

$$P = \left(\gamma' \frac{dz}{dt} - \gamma'' \frac{dy}{dt}\right) r, \quad Q = \left(\gamma'' \frac{dx}{dt} - \gamma \frac{dz}{dt}\right) r, \quad R = \left(\gamma \frac{dy}{dt} - \gamma' \frac{dx}{dt}\right) r.$$

Les angles $z_{,}Gx$, $z_{,}Gy$, $z_{,}Gz$, dont γ, γ', γ'', représentent les cosinus, sont évidemment indépendans de l'angle variable φ; les valeurs connues de ces cosinus en fonctions des deux angles constans ψ et θ, sont

$$\gamma = -\sin\theta\sin\psi,\quad \gamma' = -\sin\theta\cos\psi,\quad \gamma'' = \cos\theta.$$

Je les substitue, avec la valeur précédente de r, dans les valeurs de P, Q, R, puis celles-ci dans les formules (f), et ensuite ces formules, à la place de X, Y, Z, dans les équations (2). La densité du projectile étant D', et sa masse m ayant pour valeur

$$m = \frac{4\pi}{3}(l^3 - l'^3)D',$$

je fais en outre, pour abréger,

$$\frac{3nl^2D}{8(l^3 - l'^3)D'} = \mu,\quad \frac{2n'l^2D}{(l^3 - l'^3)D'} = \mu',$$

de sorte que les lettres μ et μ' représentent actuellement l'unité divisée par des lignes de grandeur donnée. Les équations (2) du mouvement de translation, qu'il s'agit maintenant de considérer, se changeront en celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= -\left(\mu\frac{ds}{dt} + \mu'k\right)\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}\mu'cle^{-\lambda t}\left(\frac{dz}{dt}\sin\theta\cos\psi + \frac{dy}{dt}\cos\theta\right),\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= -\left(\mu\frac{ds}{dt} + \mu'k\right)\frac{dy}{dt} - \frac{1}{2}\mu'cle^{-\lambda t}\left(\frac{dz}{dt}\sin\theta\sin\psi + \frac{dx}{dt}\cos\theta\right),\\
\frac{d^2z}{dt^2} + g &= -\left(\mu\frac{ds}{dt} + \mu'k\right)\frac{dz}{dt} + \frac{1}{2}\mu'cle^{-\lambda t}\left(\frac{dy}{dt}\sin\psi - \frac{dx}{dt}\cos\psi\right)\sin\theta.
\end{aligned}\right\}\quad (g)$$

Les premiers termes de leurs seconds membres, c'est-à-dire, les termes indépendans de la vitesse de rotation, représenteront les trois composantes de la force accélératrice, due à la résistance totale que l'air oppose au mouvement d'une sphère qui se meut sans tourner;

laquelle résistance provient, soit de la différence des pressions que le fluide exerce sur les parties antérieure et postérieure du projectile, soit du frottement de ce même fluide contre la surface sphérique. La résultante de ces trois forces est tangente à la trajectoire du centre G, et dirigée en sens contraire de son mouvement; sa valeur est

$$\mu \frac{ds^2}{dt^2} + \mu' k \frac{ds}{dt};$$

en sorte qu'elle se compose de deux termes, dont l'un est proportionnel au carré de la vitesse $\frac{ds}{dt}$, et l'autre, provenant du frottement, est simplement proportionnel à la première puissance de $\frac{ds}{dt}$. Quand cette vitesse est très petite, ce second terme est prépondérant, et la résistance se réduit sensiblement à $\mu' k \frac{ds}{dt}$. C'est ce qui arrive, par exemple, dans le cas des très petites oscillations du pendule, où la vitesse du mobile est au-dessous d'un centimètre par seconde; mais le contraire a lieu, quand la vitesse $\frac{ds}{dt}$ n'est plus très petite; et toutes les expériences que l'on a faites sur la résistance de l'air, concourent à prouver que c'est alors le second terme qui est insensible par rapport au premier. Toutefois, comme nous avons supposé (n° 9), que la vitesse k surpasse en chaque point de la surface, la composante normale de la vitesse de ce point, et est conséquemment comparable à la vitesse $\frac{ds}{dt}$, il faudra admettre, en même temps, que le facteur μ' est très petit relativement à μ, ce qui exige que le rapport $\frac{n'}{n}$ soit une très petite fraction.

Observons, en outre, que dans le cas des projectiles de l'artillerie, dont le mouvement est l'objet spécial de ce mémoire, la vitesse $\frac{1}{2}cl$ est très petite par rapport à $\frac{ds}{dt}$: pour une sphère qui aurait un rayon l égal à un décimètre, et qui ferait, par exemple, 50 tours sur elle-même en une seconde, la vitesse $\frac{1}{2}cl$ serait d'environ 15 mètres, et

15..

par conséquent encore beaucoup au-dessous de la vitesse de projection des balles et des boulets.

Les équations (g) ne sont point intégrables sous forme finie, du moins par les méthodes connues; et même, en ayant égard à la petitesse des constantes μ' et $\frac{1}{2}cl$, ce n'est que par des calculs très compliqués que l'on parviendrait à en déduire des valeurs approchées de x, y, z, dans le cas général où le mouvement du centre G a lieu suivant une direction quelconque. C'est pourquoi je me bornerai à considérer successivement les deux cas particuliers où cette direction est à très peu près horizontale et à très peu près verticale.

(16). Je supposerai donc, en premier lieu, que la composante verticale $\frac{dz}{dt}$ de la vitesse de G demeure très petite pendant toute la durée du mouvement; la composante horizontale $\frac{dy}{dt}$ est nulle, pour $t=0$, par la supposition que le plan vertical du mouvement initial est celui des x et z; et elle reste aussi constamment très petite, parce qu'elle n'est due qu'à la rotation du mobile. Je négligerai, en conséquence, les carrés de $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$, d'où il résultera $\frac{ds}{dt}=\frac{dx}{dt}$. Je négligerai également les termes des équations (g), qui ont pour facteurs la vitesse cl et l'une des composantes $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$. Ces équations deviendront, de cette manière,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\mu\frac{dx}{dt}+\mu'k\right)\frac{dx}{dt}=0,\\
&\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\mu\frac{dx}{dt}+\mu'k\right)\frac{dy}{dt}=-\tfrac{1}{2}\mu'cl\cos\theta e^{-\lambda t}\frac{dx}{dt},\\
&\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\mu\frac{dx}{dt}+\mu'k\right)\frac{dz}{dt}=-g-\tfrac{1}{2}\mu'cl\sin\theta\cos\psi e^{-\lambda t}\frac{dx}{dt}.
\end{aligned}\right\}\quad(h)$$

En intégrant la première, on aura

$$\frac{dx}{dt}=ae^{-\mu x}e^{-\mu'kt};$$

a étant la constante arbitraire, qui représentera la valeur initiale et

donnée de $\frac{dx}{dt}$. En intégrant une seconde fois, de manière qu'on ait $x = 0$ pour $t = 0$, il vient

$$e^{\mu x} = 1 + \frac{a\mu}{k\mu'}\left(1 - e^{-\mu' k t}\right); \qquad (i)$$

équation qui fera connaître la valeur de x en fonction de t, ou réciproquement. On aura, en même temps,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ak\mu'}{(a\mu + k\mu')e^{\mu' k t} - a\mu}.$$

Pour intégrer la troisième équation (h), je fais

$$\frac{dz}{dt} = z' \frac{dx}{dt}.$$

En vertu de la première, on en déduira

$$\frac{dz'}{dt}\frac{dx}{dt} = -g - \tfrac{1}{2}\mu' c l \sin\theta \cos\psi e^{-\lambda t}\frac{dx}{dt};$$

d'après la valeur précédente de $\frac{dx}{dt}$, on aura donc

$$\frac{dz'}{dt} = -\frac{g}{ak\mu'}\left[(a\mu + k\mu')e^{\mu' k t} - a\mu\right] - \tfrac{1}{2}\mu' c l \sin\theta \cos\psi e^{-\lambda t};$$

et si l'on intègre et que l'on multiplie ensuite par $\frac{dx}{dt}$, il en résultera

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = b\frac{dx}{dt} &- \frac{g}{ak^2\mu'^2}\left[(a\mu + k\mu')(e^{\mu' k t} - 1) - ak\mu\mu' t\right]\frac{dx}{dt} \\ &- \frac{\mu' c l}{2\lambda}\sin\theta\cos\psi\left(1 - e^{-\lambda t}\right)\frac{dx}{dt}; \end{aligned} \qquad (j)$$

b étant la constante arbitraire, ou la valeur de $\frac{dz}{dx}$ relative à $t = 0$, c'est-à-dire la tangente de l'angle que fait avec l'axe horizontal Ox,

la direction initiale du point G, comprise par hypothèse (nº 1), dans le plan vertical des x et z. Cette constante devra être une très petite fraction ; on la supposera positive, c'est-à-dire que l'on snpposera le projectile lancé au-dessus du plan horizontal passant par son point de départ : en négligeant son carré, a sera la vitesse initiale de G.

En mettant pour $\frac{dx}{dt}$, sa valeur dans cette dernière formule, et intégrant ensuite de manière qu'on ait $z = 0$ quand $t = 0$, on aura la valeur de z en fonction de t. Cette valeur se composera de trois parties : les deux premières s'obtiendront immédiatement; la troisième se calculera par les règles relatives aux fractions rationnelles, mais seulement lorsque le rapport numérique des constantes $\mu'k$ et λ, ou des exposants $\mu'kt$ et λt, sera donné.

On trouvera de même

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\mu' cl}{2\lambda} \cos\theta\,(1 - e^{-\lambda t})\,\frac{dx}{dt}, \qquad (k)$$

en observant que $\frac{dy}{dt} = 0$ quand $t = 0$. Après avoir mis ponr $\frac{dx}{dt}$ sa valeur, si l'on intègre, de sorte que l'on ait aussi $y = 0$ pour $t = 0$, on obtiendra la valeur de y en fonction de t, c'est-à-dire, la déviation horizontale du point G à un instant quelconqne, à gauche ou à droite du plan vertical des x et z, selon que la valeur de y sera positive ou négative (nº 1).

Elle est, comme on voit, indépendante de l'angle ψ que fait l'intersection GL du plan parallèle au mouvement de rotation et du plan horizontal, avec la droite Gx. L'intégrale $\int(1 - e^{-\lambda t})dx$ et la constante c étant des quantités positives, il s'ensuit que cette déviation y sera négative ou positive, selon que l'angle θ sera aigu ou obtus; en sorte qu'elle aura lieu dans le même sens, pendant toute la durée du mouvement. Quand le projectile tournera autour d'un axe horizontal, on aura $\theta = 90^\circ$, et la déviation horizontale sera nulle, comme cela doit être évidemment. Lorsqu'il tournera autour d'un axe vertical, la déviation se fera à gauche ou à droite du plan des x et z, selon qu'on aura

$\theta=180°$ ou $\theta=0$, ou bien, d'après ce qu'on a dit plus haut (n° 14), selon que l'hémisphère antérieur du projectile tournera de gauche à droite ou dans le sens opposé. C'est ce que l'on peut aussi regarder comme évident *à priori*, si l'on considère que cette déviation est due à l'excès de la densité de l'air en avant du projectile, sur sa densité en arrière; excès qui donne lieu à un plus grand frottement du fluide, contre l'hémisphère antérieur, et à un moindre contre l'hémisphère postérieur : or, si l'on suppose ces frottements transportés l'un et l'autre au point G, avec leurs intensités et dans leurs directions, il en résultera une force horizontale qui poussera ce point dans le sens du plus grand frottement ou en sens contraire de la rotation à laquelle il répond, c'est-à-dire vers la gauche, quand les points de la partie antérieure du projectile tourneront de gauche à droite, et vers la droite, lorsqu'ils tourneront de droite à gauche.

La déviation verticale du point G, produite par la rotation du mobile, aura pour expression l'intégrale du troisième terme de la formule (j), multiplié par dt. Elle aura lieu dans le même sens pendant toute la durée du mouvement, et sera égale à chaque instant, au produit de la déviation horizontale et de $\tang\theta \cos\psi$. Il s'ensuit qu'elle s'évanouira, soit quand le corps tournera autour d'un axe vertical, et que l'on aura en conséquence $\theta=0$ ou $\theta=180°$, soit quand le plan parallèle à la rotation sera perpendiculaire au plan vertical des x et z, ou que l'on aura $\psi=90°$; et, en effet, dans l'un et l'autre cas, tout étant semblable autour de la verticale Gz, la rotation ne peut ni élever ni abaisser le centre G. Si le projectile tourne autour d'un axe horizontal et perpendiculaire au plan des x et z, la déviation verticale sera positive ou négative selon que l'angle ψ sera aigu ou obtus, ou ce qui revient au même, d'après les conventions du n° 14, selon que les points de l'hémisphère antérieur tourneront du haut vers le bas ou du bas vers le haut. Or, cela est encore évident *à priori;* car si l'on transporte au centre G les frottements de l'air contre les parties antérieure et postérieure du mobile, l'excès du plus grand frottement sur le plus petit poussera ce point dans le sens du plus grand, ou

ces équations (l). En intégrant, on aura alors

$$x = \frac{1}{\mu}\log(1 + a\mu t), \quad t = \frac{1}{a\mu}(e^{\mu x} - 1).$$

Je multiplie les deux autres équations (l) par dt, j'y substitue cette valeur de t, et j'intègre ensuite; il vient, toutes réductions faites,

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{\mu' cl \cos\theta}{2a\mu^2}(e^{\mu x} - \mu x - 1), \\ z &= bx - \frac{g}{4a^2\mu^2}(e^{2\mu x} - 2\mu x - 1) - \frac{\mu' cl \sin\theta\cos\psi}{2a\mu^2}(e^{\mu x} - \mu x - 1), \end{aligned}\right\}(m)$$

pour les deux équations de la trajectoire à double courbure du centre de gravité G.

Quand ce point G sera parvenu à la distance x du plan des y et z, la quantité retranchée de bx dans la valeur de z, exprimera la hauteur dont il se sera abaissé au-dessous du plan perpendiculaire à celui des x et z, dans lequel il a été lancé, et dont l'équation est $z = bx$. Cet abaissement sera donc augmenté ou diminué par l'effet de la rotation, selon que le dernier terme de la valeur de z, sera négatif ou positif. Si ce terme est positif, l'abaissement total pourra être rendu négatif, auquel cas le centre G sera soulevé au-dessus du plan dont il s'agit, du moins pendant que le temps t ne sera pas devenu assez grand pour que la valeur de z qu'on vient de calculer ne soit plus suffisamment approchée. Dans le cas général où le dernier terme de cette valeur sera très petit par rapport au second, on déterminera, de la manière suivante, l'influence de la rotation du projectile sur la distance à laquelle il vient retomber sur le terrain, et qu'on appelle la *portée horizontale*. En négligeant le carré de y, cette distance sera la valeur de x, autre que zéro, qui répond à $z = 0$. Si donc on désigne la portée par ϖ, quand on néglige le dernier terme de z, et par $\varpi + \epsilon$, lorsqu'on y a égard; si de plus on néglige le carré de ϵ, et même sa premiere puissance dans ce dernier terme, on dé-

duira de la seconde formule (m), ces deux équations :

$$b\varpi - \frac{g}{4a^2\mu^2}(e^{2\mu\varpi} - 2\mu\varpi - 1) = 0,$$

$$\left[b - \frac{g}{2a^2\mu}(e^{2\mu\varpi} - 1)\right]\varepsilon - \frac{\mu' c l \sin\theta\cos\psi}{2a\mu^2}(e^{\mu\varpi} - \mu\varpi - 1) = 0.$$

La première est l'équation transcendante que l'on emploie ordinairement à la détermination de la portée, dans le cas du tir sous un petit angle. Elle n'a qu'une seule racine positive et différente de zéro : pour cette racine, le coefficient différentiel de son premier membre, c'est-à-dire le coefficient de ε dans la seconde équation, est négatif; d'où l'on conclut que la valeur de ε, tirée de cette seconde équation, aura un signe contraire à celui du produit $\sin\theta\cos\psi$. Cette valeur atteindra son *maximum,* toutes choses d'ailleurs égales, lorsque le projectile tournera autour d'un axe horizontal et perpendiculaire au plan des x et z. Dans ce cas, on aura $\theta = 90°$, et $\psi = 0$ ou $\psi = 180°$, selon qu'on supposera que les points de l'hémisphère antérieur tournent du bas vers le haut, ou qu'ils tournent du haut vers le bas; par conséquent, dans la première hypothèse, la valeur de ε sera négative, et la portée se trouvera diminuée par la rotation du mobile, tandis que dans la seconde supposition, cette valeur sera positive, et la rotation aura augmenté la portée : résultats conformes à ce qui a été dit plus haut, relativement au sens de la déviation verticale produite par cette cause.

La déviation horizontale du point G, qui a lieu quand il retombe sur le terrain, se déduira de la première formule (m) en y faisant $x = \varpi$. Si on la désigne par δ, que l'on y mette pour μ' sa valeur relative à une sphère pleine ou à $l' = 0$, et qu'on ait égard à l'équation d'où dépend la valeur de ϖ, on aura

$$\delta = -\frac{4a'bac\Pi D\cos\theta}{gD'},$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{\varpi(e^{\mu\varpi} - \mu\varpi - 1)}{e^{2\mu\varpi} - 2\mu\varpi - 1} = \Pi.$$

On voit que la grandeur de cette déviation totale est indépendante du rayon l du projectile. Son signe, contraire à celui de $\cos\theta$, est conforme à ce qui a été dit dans le numéro précédent.

Je n'ai pas connaissance que l'on ait fait aucune expérience sur le frottement de l'air qui puisse servir à déterminer le nombre n'; et, faute de cette donnée, on ne pourra pas réduire en nombre cette valeur de δ, quoiqu'elle soit présentée sous la forme la plus simple.

(18). Je passe maintenant au cas où le projectile est lancé verticalement, et où son centre G s'écarte très peu de la verticale Oz, pendant tout le mouvement.

En désignant par a la vitesse initiale et donnée du point G, on aura

$$\frac{dz}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0,$$

pour $t = 0$; conditions d'après lesquelles on déterminera les six constantes arbitraires qui seront contenues dans les intégrales des équations (g). Les composantes horizontales $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ demeureront constamment très petites. En négligeant leurs carrés, on aura donc

$$\frac{ds}{dt} = \pm \frac{dz}{dt};$$

et, pour que la différentielle ds soit constamment positive (n° 12), ainsi que dt, on prendra le signe supérieur dans la partie ascendante de la trajectoire, où dz est positive, et le signe inférieur dans sa partie descendante, où dz est négative. Cela étant, si l'on néglige aussi les produits de la vitesse cl et de l'une des composantes $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, les équations (g) deviendront

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\mu'k \pm \mu\frac{dz}{dt}\right)\frac{dx}{dt} &= \tfrac{1}{2}\mu' cl \sin\theta \cos\psi e^{-\lambda t}\frac{dz}{dt}, \\
\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\mu'k \pm \mu\frac{dz}{dt}\right)\frac{dy}{dt} &= -\tfrac{1}{2}\mu' cl \sin\theta \sin\psi e^{-\lambda t}\frac{dz}{dt}, \\
\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\mu'k \pm \mu\frac{dz}{dt}\right)\frac{dz}{dt} &= -g.
\end{aligned}\right\} (n)$$

Par le point O, je mène dans le plan des x et y, deux axes rectangulaires Ox' et Oy', tels que chacun des angles $x'Ox$ et $y'Oy$ soit égal à ψ, et que Ox' coïncide avec la position initiale de GL. En désignant par x' et y' les coordonnées horizontales de G, rapportées à ces nouveaux axes, nous aurons, par les formules connues,

$$x' = x\cos\psi - y\sin\psi, \quad y' = x\sin\psi + y\cos\psi.$$

Les deux premières équations (n) se changeront en celles-ci :

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \left(\mu' k \pm \mu\frac{dz}{dt}\right)\frac{dy'}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \left(\mu' k \pm \mu\frac{dz}{dt}\right)\frac{dx'}{dt} = \tfrac{1}{2}\mu' cl\sin\theta e^{-\lambda t}\frac{dz}{dt},$$

dans lesquelles l'angle ψ a disparu, comme cela devait être, puisque la direction initiale du mouvement étant verticale, sa projection horizontale Ox serait tout-à-fait arbitraire. En les intégrant et observant qu'on doit avoir $\frac{dx'}{dt} = 0$ et $\frac{dy'}{dt} = 0$ quand $t = 0$, il vient

$$\frac{dy'}{dt} = 0, \quad \frac{dx'}{dt} = \tfrac{1}{2}\mu' cl\sin\theta e^{-\mu' kt}e^{\mp\mu z}\int e^{-\lambda t}e^{\mu' kt}e^{\pm\mu z}\frac{dz}{dt}dt;$$

l'intégrale indiquée étant aussi nulle pour $t = 0$. L'ordonnée y' sera donc constante; et comme elle est zéro à l'origine du mouvement, il s'ensuit qu'elle le sera pendant toute sa durée et que le centre G demeurera constamment dans le plan vertical des z et x'. C'est effectivement ce qui doit avoir lieu; car l'intersection GL du plan parallèle à la rotation et du plan horizontal, conservant toujours la même direction (nº 14), parallèle à l'axe Ox', il n'y aurait aucune raison pour que la rotation fît dévier le centre G, ni d'un côté ni de l'autre, du plan des z et x'. L'expression de $\frac{dx'}{dt}$ montre en outre, à raison de la quantité $\frac{dz}{dt}$ contenue sous le signe $\int$, que la vitesse horizontale du centre G, dirigée vers le nœud ascendant L de cette intersection GL, est continuellement croissante pendant l'élévation du mobile,

et continuellement décroissante pendant sa chute; ce qu'on peut encore regarder comme évident *à priori*, du moins lorsque le projectile tourne autour d'un axe horizontal, et qu'on a $\theta = 90^\circ$. En effet, d'une part, le plus grand frottement a lieu pendant la première période du mouvement, à la partie supérieure du mobile, et pendant la seconde, à sa partie inférieure; et, d'un autre côté, cette dernière partie tournant constamment du nœud ascendant vers le nœud descendant, il en résulte que la différence des frottements supérieur et inférieur doit pousser successivement le centre G dans les deux sens opposés, comme nous le trouvons. Quand le mobile tourne autour d'un axe vertical, on a $\theta = 0$ ou $\theta = 180^\circ$; il s'ensuit $\frac{dx'}{dt} = 0$ et $x' = 0$; ce qui doit être évidemment, puisque alors il n'y a aucune raison pour que la rotation fasse sortir le centre G, de la verticale Oz autour de laquelle tout est parfaitement symétrique.

On pourrait intégrer la troisième équation (n) en conservant dans son premier membre, le terme $\mu' k$; mais pour simplifier les résultats, je supprimerai ce terme par rapport à $\pm\mu\frac{dz}{dt}$. En le supprimant aussi dans le premier membre de l'équation relative à x', nous aurons à considérer, dans le numéro suivant, les deux équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} \pm \mu \frac{dz^2}{dt^2} &= -g, \\ \frac{d^2x'}{dt^2} \pm \mu \frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt} &= \tfrac{1}{2}\mu' cl \sin\theta e^{-\mu z}\frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (o)$$

(19). En prenant d'abord le signe supérieur dans la première, intégrant et déterminant la constante arbitraire, on trouve

$$t\sqrt{g\mu} = \text{arc}\left(\text{tang} = a\sqrt{\frac{\mu}{g}}\right) - \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{dz}{dt}\sqrt{\frac{\mu}{g}}\right);$$

d'où l'on tire réciproquement

$$\frac{dz}{dt}\sqrt{\frac{\mu}{g}} = \frac{a\mu\cos t\sqrt{g\mu} - \sqrt{g\mu}\sin t\sqrt{g\mu}}{a\mu\sin t\sqrt{g\mu} + \sqrt{g\mu}\cos t\sqrt{g\mu}};$$

et en intégrant une seconde fois, de sorte qu'on ait $z=0$ pour $t=0$, il vient

$$z = \frac{1}{\mu}\log\left(\cos t\sqrt{g\mu} + a\sqrt{\frac{\mu}{g}}\sin t\sqrt{g\mu}\right).$$

Si l'on désigne par t' le temps total de l'élévation du mobile, correspondant à $\frac{dz}{dt}=0$, on aura

$$t'\sqrt{g\mu} = \text{arc}\left(\text{tang} = a\sqrt{\frac{\mu}{g}}\right),$$

et par conséquent

$$\cos t'\sqrt{g\mu} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g+a^2\mu}}, \quad \sin t'\sqrt{g\mu} = \frac{a\sqrt{\mu}}{\sqrt{g+a^2\mu}}.$$

En désignant donc aussi par h, la plus grande hauteur à laquelle le centre G parviendra, ou la valeur de z relative à $t=t'$, il en résultera

$$h = \frac{1}{2\mu}\log\left(1 + \frac{a^2\mu}{g}\right).$$

Je prends actuellement le signe inférieur dans la première équation (o), puis j'intègre de manière qu'on ait $t=t'$ et $z=h$, quand $\frac{dz}{dt}=0$; il en résulte

$$\frac{dz}{dt}\sqrt{\frac{\mu}{g}} = \frac{e^{-(t-t')\sqrt{g\mu}} - e^{(t-t')\sqrt{g\mu}}}{e^{-(t-t')\sqrt{g\mu}} + e^{(t-t')\sqrt{g\mu}}},$$

$$z = h - \frac{1}{\mu}\log\frac{1}{2}\left[e^{-(t-t')\sqrt{g\mu}} + e^{(t-t')\sqrt{g\mu}}\right].$$

Je représente par $t_{\prime}$ le temps de la chute; il faudra que cette dernière valeur de z se réduise à zéro pour $t=t'+t_{\prime}$; d'après la valeur de h, et en passant des logarithmes aux nombres, on aura donc

$$\sqrt{1+\frac{a^2\mu}{g}} = \frac{1}{2}\left(e^{-t_{\prime}\sqrt{g\mu}} + e^{t_{\prime}\sqrt{g\mu}}\right);$$

d'où l'on tire

$$t_{,}\sqrt{g\mu} = \log\left(a\sqrt{\frac{\mu}{g}} + \sqrt{1 + \frac{a^2\mu}{g}}\right),$$

et, par conséquent,

$$(t' + t_{,})\sqrt{g\mu} = \text{arc}\left(\text{tang} = a\sqrt{\frac{\mu}{g}}\right) + \log\left(a\sqrt{\frac{\mu}{g}} + \sqrt{1 + \frac{a^2\mu}{g}}\right).$$

Le temps total $t' + t_{,}$ de l'élévation et de la chute successives du mobile peut être donné par l'observation; et cela étant, cette dernière équation servira, si l'on veut, à déterminer la valeur de μ' relative à la sphère que l'on aura projetée verticalement, en supposant connue la vitesse de projection a. Cette formule et les précédentes ne dépendent pas de la vitesse de rotation; ce qui tient au degré d'approximation où nous nous sommes arrêtés.

De la seconde équation (o), on déduit

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{1}{2}\mu' cl \sin\theta\, e^{\mp\mu z} \int e^{\pm\mu z} e^{-\mu} \frac{dz}{dt}\, dt;$$

l'intégrale étant prise de manière qu'elle s'évanouisse avec t.

Pour des valeurs de t moindres que t', on prendra les signes supérieurs dans cette formule, et l'on y substituera les expressions de $\frac{dz}{dt}$ et des exponentielles $e^{-\mu z}$ et $e^{\mu z}$, qui se rapportent à l'élévation du mobile. L'intégration indiquée s'effectuera par les règles ordinaires; mais l'expression de dx' qui en résultera ne pourra s'intégrer pour en déduire la valeur de x', que par la réduction en série, ou par la méthode des quadratures. De même, pour des valeurs de t plus grandes que t', on prendra dans la formule précédente les signes inférieurs; après y avoir mis pour $\frac{dz}{dt}$, $e^{\mu z}$, $e^{-\mu z}$, leurs expressions relatives à la chute du projectile, on effectuera immédiatement l'intégration indiquée; et ensuite, de l'expression de dx', on déduira la valeur de x', par la réduction en série ou par les quadratures. On pourra ainsi cal-

culer, par exemple, la déviation totale du point G, qui aura lieu à partir de la verticale Oz et dans le plan de cette ligne et de la droite GL, lorsque le mobile retombera sur le terrain; déviation qui s'observera du côté du nœud ascendant L, quand sa valeur sera positive, et du côté du nœud descendant, quand elle sera négative.

---

§ III. *Influence de la non-sphéricité du projectile, sur son double mouvement de rotation et de translation.*

(20). Quand le projectile n'est point un corps composé de couches sphériques et concentriques, dont chacune a la même densité dans toute son étendue, il faut supposer qu'il s'en écarte très peu, afin de pouvoir intégrer les équations de son double mouvement par approximation. Dans cette hypothèse, qui convient effectivement aux projectiles de l'artillerie, la solution du problème exigera encore une analyse fort compliquée que je vais exposer avec tous les développements nécessaires et aussi simplement qu'il sera possible.

Pour un corps de cette forme, l'influence du frottement sur ses deux mouvements sera à très peu près la même que s'il était tout-à-fait sphérique; et cette influence ayant été déterminée dans le paragraphe précédent, on en fera maintenant abstraction, et l'on aura seulement égard à la pesanteur et à la résistance proprement dite du fluide, normale en chaque point de la surface du mobile. Lorsque l'on aura calculé, par exemple, les déviations horizontale et verticale du centre de gravité, qui seront dues soit à la non-sphéricité, soit à la non-homogénéité du mobile, on y joindra celles qui se rapportent à un corps sphérique et qui proviennent du frottement de l'air. Si l'on veut, on y ajoutera aussi les déviations correspondantes à la rotation de la Terre, que j'ai considérées dans un autre Mémoire, et même celles qui pourraient être produites par le vent dans un air qui ne serait pas en repos : les sommes des déviations partielles du

centre G, dues à ces diverses causes isolément, exprimeront à fort peu près ses déviations totales, résultantes du concours de ces mêmes causes.

Cela posé, je supprime dans les formules (7), la partie correspondante au frottement de l'air; puis je les substitue dans les équations (2) et (3) qui deviennent

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -nDf_{,}V^2\cos\lambda d\sigma,\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -nDf_{,}V^2\cos\mu d\sigma,\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -nDf_{,}V^2\cos\nu d\sigma,\\ Adp+(C-B)rqdt &= nDf_{,}(z_{,}\cos\mu_{,}-y_{,}\cos\nu_{,})V^2d\sigma,\\ Bdq+(A-C)prdt &= nDf_{,}(x_{,}\cos\nu_{,}-z_{,}\cos\lambda_{,})V^2d\sigma,\\ Cdr+(B-A)qpdt &= nDf_{,}(y_{,}\cos\lambda_{,}-x_{,}\cos\mu_{,})V^2d\sigma, \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

où l'on devra se rappeler que les intégrales indiquées par $\int_{,}$ ne s'étendent qu'à la partie antérieure du projectile, dont le contour est déterminé sur sa surface, par l'équation (6) ou $V=0$.

Les valeurs de $\cos\lambda_{,}$, $\cos\mu_{,}$, $\cos\nu_{,}$, seront toujours déterminées par les formules (5) qu'il s'agira d'appliquer à la surface particulière du projectile, et d'où l'on déduira ensuite, au moyen des formules (16) et (17), les expressions des quantités V, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, relatives à un point quelconque M de cette surface.

(21). Désignons par ρ le rayon vecteur GM de ce point, et par λ', μ', ν', les cosinus des angles qu'il fait avec les axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, de sorte qu'on ait

$$x_{,}=\rho\lambda',\quad y_{,}=\rho\mu',\quad z_{,}=\rho\nu',$$

pour les coordonnées de M, et en outre

$$\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2=1.$$

De l'équation (4) de la surface, on tirera une valeur de ρ que l'on pourra représenter par

$$\rho=l(1+\epsilon u);$$

l étant le rayon d'une sphère équivalente en volume à celui du projectile, u désignant une fonction donnée de λ', μ', ν', et ε une constante qui sera une très petite fraction. On aura réciproquement

$$\rho = \sqrt{x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2}, \quad \lambda' = \frac{x_{,}}{\rho}, \quad \mu' = \frac{y_{,}}{\rho}, \quad \nu' = \frac{z_{,}}{\rho};$$

et l'on devra prendre

$$f(x_{,}, y_{,}, z_{,}) = \rho - l(1 + \varepsilon u),$$

pour la fonction f qu'il faudra substituer dans les équations (5).

Dans tous les calculs suivants, nous négligerons le carré de ε; mais après avoir déterminé les valeurs approchées des inconnues, en ayant seulement égard à la première puissance de cette fraction, on pourra, si l'on veut, tenir compte successivement de son carré, de son cube, etc., par la méthode connue des approximations successives, dont l'application ne présentera plus d'autre difficulté que la longueur des calculs; l'approximation à laquelle nous nous bornerons, suffira pour rendre raison de toutes les circonstances que présenteront les deux mouvements du projectile, et pour apprécier l'influence de sa figure et de sa rotation sur la justesse du tir.

D'après la forme de la fonction f, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx_{,}} &= \frac{x_{,}}{\rho} - l\varepsilon\frac{du}{d\lambda'}\cdot\frac{y_{,}^2 + z_{,}^2}{\rho^3} + l\varepsilon\frac{du}{d\mu'}\cdot\frac{x_{,}y_{,}}{\rho^3} + l\varepsilon\frac{du}{d\nu'}\cdot\frac{x_{,}z_{,}}{\rho^3},\\
\frac{df}{dy_{,}} &= \frac{y_{,}}{\rho} - l\varepsilon\frac{du}{d\mu'}\cdot\frac{z_{,}^2 + x_{,}^2}{\rho^3} + l\varepsilon\frac{du}{d\nu'}\cdot\frac{y_{,}z_{,}}{\rho^3} + l\varepsilon\frac{du}{d\lambda'}\cdot\frac{y_{,}x_{,}}{\rho^3},\\
\frac{df}{dz_{,}} &= \frac{z_{,}}{\rho} - l\varepsilon\frac{du}{d\nu'}\cdot\frac{x_{,}^2 + y_{,}^2}{\rho^3} + l\varepsilon\frac{du}{d\lambda'}\cdot\frac{z_{,}x_{,}}{\rho^3} + l\varepsilon\frac{du}{d\mu'}\cdot\frac{z_{,}y_{,}}{\rho^3}.
\end{aligned}$$

Je mets pour ρ, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, leurs valeurs dans ces formules, et seulement l à la place de ρ dans les termes qui ont ε pour facteur; il

en résulte

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx_i} &= \lambda' - \epsilon\frac{du}{d\lambda'} + \epsilon\lambda'\xi, \\ \frac{df}{dy_i} &= \mu' - \epsilon\frac{du}{d\mu'} + \epsilon\mu'\xi, \\ \frac{df}{dz_i} &= \nu' - \epsilon\frac{du}{d\nu'} + \epsilon\nu'\xi, \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

en faisant, pour abréger,

$$\lambda'\frac{du}{d\lambda'} + \mu'\frac{du}{d\mu'} + \nu'\frac{du}{d\nu'} = \xi;$$

et puisqu'on néglige le carré de ϵ, il s'ensuivra

$$\sqrt{\frac{df^2}{dx_i^2} + \frac{df^2}{dy_i^2} + \frac{df^2}{dz_i^2}} = 1;$$

par conséquent, en vertu des formules (5), ces valeurs de $\frac{df}{dx_i}, \frac{df}{dy_i}, \frac{df}{dz_i}$, seront celles de $\cos\lambda_i$, $\cos\mu_i$, $\cos\nu_i$. Elles diffèrent très peu de λ', μ', ν'; ce qui doit être, en effet, parce que la normale au point M s'écarte fort peu du prolongement du rayon GM.

De ces valeurs, on déduit

$$\left.\begin{aligned} z_i\cos\mu_i - y_i\cos\nu_i &= l\epsilon\left(\mu'\frac{du}{d\nu'} - \nu'\frac{du}{d\mu'}\right), \\ x_i\cos\nu_i - z_i\cos\lambda_i &= l\epsilon\left(\nu'\frac{du}{d\lambda'} - \lambda'\frac{du}{d\nu'}\right), \\ y_i\cos\lambda_i - x_i\cos\mu_i &= l\epsilon\left(\lambda'\frac{du}{d\mu'} - \mu'\frac{du}{d\lambda'}\right). \end{aligned}\right\} \quad (C)$$

Les formules (16) deviendront en même temps

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \lambda'' - \epsilon j + \epsilon\lambda''\xi, \\ \cos\mu &= \mu'' - \epsilon j' + \epsilon\mu''\xi, \\ \cos\nu &= \nu'' - \epsilon j'' + \epsilon\nu''\xi; \end{aligned}\right\} \quad (D)$$

où l'on désigne par λ'', μ'', ν'', les cosinus des angles compris entre le

rayon GM et les droites Gx, Gy, Gz, de manière que l'on ait

$$\alpha\lambda' + 6\mu' + \gamma\nu' = \lambda'',$$
$$\alpha'\lambda' + 6'\mu' + \gamma'\nu' = \mu'',$$
$$\alpha''\lambda' + 6''\mu' + \gamma''\nu' = \nu'',$$

d'après la signification des neuf quantités α, 6, etc., (n° 7); et où l'on fait aussi, pour abréger,

$$\alpha \frac{du}{d\lambda'} + 6 \frac{du}{d\mu'} + \gamma \frac{du}{d\nu'} = j,$$
$$\alpha' \frac{du}{d\lambda'} + 6' \frac{du}{d\mu'} + \gamma' \frac{du}{d\nu'} = j',$$
$$\alpha'' \frac{du}{d\lambda'} + 6'' \frac{du}{d\mu'} + \gamma'' \frac{du}{d\nu'} = j''.$$

Je mène par le centre G, la droite GH tangente à la trajectoire et dirigée dans le sens de son mouvement; puis j'appelle ζ l'angle HGM compris entre cette droite et le rayon GM, de manière que ds étant l'élément de cette courbe, ou $\frac{ds}{dt}$ la vitesse du point G, sa composante suivant GM soit $\frac{ds}{dt}\cos\zeta$. D'après ce que représentent les quantités x', y', z', du n° 7, et ce qu'on vient de désigner par λ', μ', ν', nous aurons

$$\lambda' x' + \mu' y' + \nu' z' = \frac{ds}{dt}\cos\zeta;$$

au moyen de quoi, et des valeurs de $\cos\lambda_{,}$, $\cos\mu_{,}$, $\cos\nu_{,}$, exprimées par les formules (B), l'équation (17) deviendra

$$\left.\begin{aligned} V = (1+\epsilon\xi)\frac{ds}{dt}\cos\zeta - \epsilon\left(x'\frac{du}{d\lambda'} + y'\frac{du}{d\mu'} + z'\frac{du}{d\nu'}\right) \\ + \epsilon\left[p\left(\nu'\frac{du}{d\mu'} - \mu'\frac{du}{d\nu'}\right) + q\left(\lambda'\frac{du}{d\nu'} - \nu'\frac{du}{d\lambda'}\right) + r\left(\mu'\frac{du}{d\lambda'} - \lambda'\frac{du}{d\mu'}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (E)$$

De plus les cosinus λ', μ', ν', et les cosinus λ'', μ'', ν'', répondant à

une même droite GM, et à deux systèmes différents d'axes rectangulaires auxquels se rapportent les cosinus α, β, etc., nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\lambda' &= \alpha\lambda'' + \alpha'\mu'' + \alpha''\nu'',\\ \mu' &= \beta\lambda'' + \beta'\mu'' + \beta''\nu'',\\ \nu' &= \gamma\lambda'' + \gamma'\mu'' + \gamma''\nu''.\end{aligned}\right\} \quad (F)$$

Enfin, si l'on désigne par ϖ l'angle que fait la projection de GM sur un plan perpendiculaire à GH et passant par le point G, avec une droite fixe menée arbitrairement dans ce plan et par ce point; et si h, h', etc., représentent les neuf mêmes cosinus qué dans le nº 12, on aura

$$\left.\begin{aligned}\lambda'' &= h\cos\zeta + h'\sin\zeta\cos\varpi + h''\sin\zeta\sin\varpi,\\ \mu'' &= h_1\cos\zeta + h'_1\sin\zeta\cos\varpi + h''_1\sin\zeta\sin\varpi,\\ \nu'' &= h_2\cos\zeta + h'_2\sin\zeta\cos\varpi + h''_2\sin\zeta\sin\varpi.\end{aligned}\right\} \quad (G)$$

(22). Telles sont donc les diverses valeurs que l'on devra employer sous les signes $\int_{,}$, dans les seconds membres des équations (A). Les coefficients de $d\sigma$ se trouveront exprimés en fonctions des deux angles ζ et ϖ, variables d'un point M à un autre de la surface du projectile, et de quantités communes à tous les points du mobile, qui varieront avec le temps t. C'est par rapport à ces deux angles que les intégrales $\int_{,}$ devront être prises.

L'élément de la surface sphérique dont le centre est G et le rayon ρ, aura pour expression $\rho^2\sin\zeta d\zeta d\varpi$, et sera la projection sur cette surface, de l'élément $d\sigma$ de la surface du mobile au point M. Si l'on désigne par i l'angle aigu que fait la normale en ce point avec le rayon MG., on aura, en conséquence,

$$\cos i d\sigma = \rho^2 \sin\zeta d\zeta d\varpi.$$

On aura d'ailleurs

$$\cos i = \lambda'\cos\lambda_{,} + \mu'\cos\mu_{,} + \nu'\cos\nu_{,};$$

quantité que les formules (B), prises pour les valeurs de $\cos\lambda_{,}$, $\cos\mu_{,}$, $\cos\nu_{,}$, réduiront à l'unité. En ayant égard à la valeur de ρ, et parce qu'on néglige le carré de ϵ, on aura donc simplement

$$d\sigma = l^2(1 + 2\epsilon u)\sin\zeta d\zeta d\eta.$$

Pour étendre les intégrales doubles indiquées par $\int_{,}$ à toute la partie antérieure du projectile, il faudra les prendre depuis $\zeta = 0$ jusqu'à une valeur de ζ en fonction de η, donnée par l'équation $V = 0$, et ensuite depuis $\eta = 0$ jusqu'à $\eta = 2\pi$. Or, d'après la formule (E), cette valeur de ζ différera très peu de $\frac{1}{2}\pi$; en sorte qu'on pourra la représenter par $\frac{1}{2}\pi + \epsilon k$, en désignant par k une fonction de η dont la valeur nous sera inutile à connaître. En effet, soient Π et Ω deux fonctions quelconques de ζ et η; en négligeant le carré de ϵ, on aura

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi + \epsilon k}(\Pi + \epsilon\Omega)\sin\zeta d\zeta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\Pi + \epsilon\Omega)\sin\zeta d\zeta + \epsilon k'\Pi';$$

k' et Π' étant les valeurs de k et Π qui répondent à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$. On aura par conséquent

$$\int_{,}(\Pi + \epsilon\Omega)\, d\sigma = l^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}(\Pi + \epsilon\Omega + 2\epsilon u\Pi)\sin\zeta d\zeta d\eta + l^2\epsilon\int_0^{2\pi}k'\Pi' d\eta;$$

et comme dans chacune des intégrales $\int_{,}$ que contiennent les seconds membres des équations (A), le coefficient de $d\sigma$ a V^2 pour facteur, c'est-à-dire une quantité dont la partie indépendante de ϵ s'évanouit, en vertu de la formule (E), pour $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, il s'ensuit que pour ces intégrales, la quantité Π' sera zéro; par conséquent, il suffira de les étendre depuis $\zeta = 0$ jusqu'à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$; ce qui en simplifiera beaucoup le calcul. Mais pour effectuer ces intégrations, il faudra préalablement faire des hypothèses sur l'expression de u en fonction de λ', μ', ν'; et nous choisirons successivement celles qui seront le plus propres à montrer les influences distinctes de la non-sphéricité et de la non-

homogénéité du projectile sur son double mouvement. Dans ce qui va suivre, il ne sera question que de la première cause : l'examen de la seconde sera l'objet du quatrième paragraphe de ce Mémoire.

(23). Supposons que le projectile soit un ellipsoïde homogène, à trois axes inégaux, mais très peu différents entre eux. Son centre de gravité G et ses axes principaux $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, étant son centre et ses axes de figure, l'équation de sa surface sera

$$\frac{x_{,}^2}{1+\epsilon f} + \frac{y_{,}^2}{1+\epsilon f'} + \frac{z_{,}^2}{1+\epsilon f''} = l^2;$$

f, f', f'', étant des constantes données, positives ou négatives, de sorte que ϵf, $\epsilon f'$, $\epsilon f''$, soient de très petites fractions, et les trois demi-axes très peu différents de l. En négligeant le carré de ϵ, son volume aura $\frac{4\pi l^3}{3}\left[1 + \frac{1}{2}\epsilon.(f + f' + f'')\right]$; pour qu'il soit équivalent à celui de la sphère dont le rayon est l, il faudra donc supposer qu'on a

$$f + f' + f'' = 0.$$

Si l'on met $\rho\lambda'$, $\rho\mu'$, $\rho\nu'$, à la place de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, dans l'équation précédente de la surface, on en déduira

$$\rho = l\left[1 + \frac{1}{2}\epsilon(\lambda'^2 f'' + \mu'^2 f' + \nu'^2 f)\right];$$

en comparant cette valeur de ρ à celle du n° 21, nous aurons donc

$$u = \frac{1}{2}(\lambda'^2 f'' + \mu'^2 f' + \nu'^2 f);$$

au moyen de quoi l'équation (E) deviendra

$$\begin{aligned} V = (1 + \epsilon\xi)\frac{dr}{dt}\cos\zeta - \epsilon(x'\lambda' f'' + y'\mu' f' + z'\nu' f) \\ + \epsilon[(f' - f)p\nu'\mu' + (f - f'')q\lambda'\nu' + (f'' - f')r\mu'\lambda']. \end{aligned} \qquad \text{(H)}$$

En vertu des équations (C), les intégrales contenues dans les trois

dernières équations (A), ayant ε pour facteur, il suffira d'y mettre $\frac{ds}{dt}\cos\zeta$ à la place de V, et $l^2 \sin\zeta d\zeta dn$ au lieu de $d\sigma$. D'après ces équations (C) et la valeur de u, il en résultera

$$\int_{,}(z_{,}\cos\mu_{,}-y_{,}\cos\nu_{,})\,\mathrm{V}^2 d\sigma = \varepsilon(f-f')l^3\frac{ds^2}{dt^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\nu'\mu'\cos^2\zeta\sin\zeta d\zeta dn,$$

$$\int_{,}(x_{,}\cos\nu_{,}-z_{,}\cos\lambda_{,})\,\mathrm{V}^2 d\sigma = \varepsilon(f''-f)l^3\frac{ds^2}{dt^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\lambda'\nu'\cos^2\zeta\sin\zeta d\zeta dn,$$

$$\int_{,}(y_{,}\cos\lambda_{,}-x_{,}\cos\mu_{,})\,\mathrm{V}^2 d\sigma = \varepsilon(f'-f'')l^3\frac{ds^2}{dt^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\mu'\lambda'\cos^2\zeta\sin\zeta d\zeta dn.$$

Au moyen des formules (F) et (G), et à raison des limites de cette dernière intégrale double, on trouvera pour sa valeur

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\mu'\lambda'\cos^2\zeta\sin\zeta d\zeta dn = \frac{2\pi}{5}\Big[&\alpha\beta\left(h^2+\tfrac{1}{3}h'^2+\tfrac{1}{3}h''^2\right)\\ &+\alpha'\beta'\left(h_1^2+\tfrac{1}{3}h_1'^2+\tfrac{1}{3}h_1''^2\right)+\alpha''\beta''\left(h_2^2+\tfrac{1}{3}h_2'^2+\tfrac{1}{3}h_2''^2\right)\\ &+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)\left(hh_1+\tfrac{1}{3}h'h'_1+\tfrac{1}{3}h''h''_1\right)\\ &+(\alpha\beta''+\alpha''\beta)\left(hh_2+\tfrac{1}{3}h'h'_2+\tfrac{1}{3}h''h''_2\right)\\ &+(\alpha'\beta''+\alpha''\beta')\left(h_1h_2+\tfrac{1}{3}h'_1h'_2+\tfrac{1}{3}h''_1h''_2\right)\Big];\end{aligned}$$

mais, d'après ce que les neuf quantités h, h_1, h_2, etc., représentent (n° 12), on a

$$h^2+h_1^2+h_2^2=1,\quad h'^2+h_1'^2+h_2'^2=1,\quad h''^2+h_1''^2+h_2''^2=1,$$
$$hh_1+h'h'_1+h''h''_1=0,\quad hh_2+h'h'_2+h''h''_2=0,\quad h_1h_2+h'_1h'_2+h''_1h''_2=0;$$

ce qui permettra d'éliminer de la formule précédente, les six dernières de ces quantités; et comme les trois premières ont pour valeurs

$$h=\frac{dx}{ds},\quad h_1=\frac{dy}{ds},\quad h_2=\frac{dz}{ds},$$

et que l'on a d'ailleurs

$$\alpha\epsilon + \alpha'\epsilon' + \alpha''\epsilon'' = 0,$$

on trouvera que la valeur de cette troisième intégrale double peut se mettre sous la forme :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} \mu'^2\lambda'^2\cos^2\zeta \sin\zeta d\zeta d\nu = \frac{4\pi}{15}\left(\alpha\frac{dx}{ds} + \alpha'\frac{dy}{ds} + \alpha''\frac{dz}{ds}\right)\left(\epsilon\frac{dx}{ds} + \epsilon'\frac{dy}{ds} + \epsilon''\frac{dz}{ds}\right).$$

On exprimera semblablement les valeurs des deux autres intégrales doubles; et en ayant égard aux équations (13), on en conclura finalement

$$\left.\begin{aligned}\int_{\prime}(z_{\prime}\cos\mu_{\prime} - y_{\prime}\cos\nu_{\prime})\,V^2 d\sigma &= \frac{4\pi\iota}{15}(f - f')l^3 z'y',\\ \int_{\prime}(x_{\prime}\cos\nu_{\prime} - z_{\prime}\cos\lambda_{\prime})\,V^2 d\sigma &= \frac{4\pi\iota}{15}(f'' - f)l^3 x'z',\\ \int_{\prime}(y_{\prime}\cos\lambda_{\prime} - x_{\prime}\cos\mu_{\prime})\,V^2 d\sigma &= \frac{4\pi\iota}{15}(f' - f'')l^3 y'x';\end{aligned}\right\} \quad (I)$$

x', y', z', étant ici, comme dans le n° 7, les composantes suivant les axes $Gx_{\prime}$, $Gy_{\prime}$, $Gz_{\prime}$, de la vitesse $\frac{ds}{dt}$ du centre G.

(24). Considérons actuellement les intégrales $\int_{\prime}$ comprises dans les équations du mouvement de translation, et par exemple, celle que renferme la première équation (A).

En vertu de la formule (H) et de la première équation (D), et en observant que d'après les valeurs de ξ et u des n°s 21 et 23, on a

$$\xi = 2u = \lambda'^2 f'' + \mu'^2 f' + \nu'^2 f,$$

on trouvera d'abord

$$\int_{\prime} \mathrm{V}^{\prime} \cos \lambda d\sigma = l^{4} \frac{ds^{4}}{dt^{4}} \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\int_{0}^{2\pi} \lambda'' \cos^{2}\zeta \sin\zeta d\zeta d\pi$$
$$+ 4\varepsilon l^{4} \frac{ds^{4}}{dt^{4}} \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\int_{0}^{2\pi} (\lambda'^{2} f'' + \mu'^{2} f' + \nu'^{2} f) \lambda'' \cos^{2}\zeta \sin\zeta d\zeta d\pi$$
$$- \varepsilon l^{4} \frac{ds^{3}}{dt^{3}} \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\int_{0}^{2\pi} (\alpha\lambda' f'' + 6\mu' f' + \gamma\nu' f) \cos^{3}\zeta \sin\zeta d\zeta d\pi$$
$$- 2\varepsilon l^{4} \frac{ds}{dt} \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\int_{0}^{2\pi} (x'\lambda' f'' + y'\mu' f + z'\nu' f) \lambda'' \cos\zeta \sin\zeta d\zeta d\pi$$
$$+ 2\varepsilon l^{5} \frac{ds}{dt} \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\int_{0}^{2\pi} [(f'-f) p\nu'\mu' + (f-f'') q\lambda'\nu' + (f''-f') r\mu'\lambda'] \lambda'' \cos\zeta \sin\zeta d\zeta d\pi.$$

De la première formule (G), on déduit immédiatement

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\int_{0}^{2\pi} \lambda'' \cos^{2}\zeta \sin\zeta d\zeta d\pi = \frac{1}{2}\pi h = \frac{1}{2}\pi \frac{dx}{ds}.$$

Au moyen des équations (F) et (G), et des relations qui existent entre h, h', etc., aussi bien qu'entre α, α', etc., on trouvera, sans difficulté,

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\int_{0}^{2\pi} (\lambda'^{2} f'' + \mu'^{2} f' + \nu'^{2} f) \lambda'' \cos^{2}\zeta \sin\zeta d\zeta d\pi$$
$$= \frac{\pi f''}{12} [h(\alpha h + \alpha' h_1 + \alpha'' h_2)^{2} + 2\alpha(\alpha h + \alpha' h_1 + \alpha'' h_2) + h]$$
$$+ \frac{\pi f'}{12} [h(6h + 6' h_1 + 6'' h_2)^{2} + 26(6h + 6' h_1 + 6'' h_2) + h]$$
$$+ \frac{\pi f}{12} [h(\gamma h + \gamma' h_1 + \gamma'' h_2)^{2} + 2\gamma(\gamma h + \gamma' h_1 + \gamma'' h_2) + h].$$

Donc, à cause des valeurs de h, h_1, h_2, et des formules (13), nous aurons

$$\frac{ds^{4}}{dt^{4}} \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\int_{0}^{2\pi} (\lambda'^{2} f'' + \mu'^{2} f' + \nu'^{2} f) \lambda'' \cos^{2}\zeta \sin\zeta d\zeta d\pi$$
$$= \frac{\pi}{12}\Big[\Big(x'^{2} \frac{dx}{ds} + 2\alpha x' \frac{ds}{dt}\Big) f'' + \Big(y'^{2} \frac{dx}{ds} + 26 y' \frac{ds}{dt}\Big) f' + \Big(z'^{2} \frac{dx}{ds} + 2\gamma z' \frac{ds}{dt}\Big) f\Big].$$

On trouvera, par des calculs semblables,

$$\frac{ds^{3}}{dt^{3}} \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\int_{0}^{2\pi} (\alpha\lambda' f'' + 6\mu' f' + \gamma\nu' f) \cos^{2}\zeta \sin\zeta d\zeta d\pi$$
$$= \frac{1}{2}\pi \frac{ds}{dt} (\alpha x' f'' + 6 y' f' + \gamma z' f),$$

$$\frac{ds}{dt}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}(x'\lambda' f'' + y'\mu' f' + z'\nu' f)\lambda''\cos\zeta\sin\zeta d\zeta d\eta$$
$$= \frac{\pi}{4}\Big[\Big(x'^2\frac{dx}{ds} + \alpha x'\frac{ds}{dt}\Big)f'' + \Big(y'^2\frac{dx}{ds} + 6y'\frac{ds}{dt}\Big)f' + \Big(z'^2\frac{dx}{ds} + \gamma z'\frac{ds}{dt}\Big)f\Big],$$

$$\frac{ds}{dt}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}[(f'-f)p\nu'\mu' + (f-f'')q\lambda'\nu' + (f''-f')r\mu'\lambda']\lambda''\cos\zeta\sin\zeta d\zeta d\eta$$
$$= \frac{2\pi p}{15}(f'-f)\Big[\frac{dx}{ds}\frac{dt}{ds}y'z' - 6\gamma\frac{dx}{dt}\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{1}{2}(\gamma y' + 6z')\Big(1 + \frac{dx^2}{ds^2}\Big)\Big]$$
$$+ \frac{2\pi q}{15}(f-f'')\Big[\frac{dx}{ds}\frac{dt}{ds}z'x' - \gamma\alpha\frac{dx}{dt}\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{1}{2}(\alpha z' + \gamma x')\Big(1 + \frac{dx^2}{ds^2}\Big)\Big]$$
$$+ \frac{2\pi r}{15}(f''-f')\Big[\frac{dx}{ds}\frac{dt}{ds}x'y' - \alpha 6\frac{dx}{dt}\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{1}{2}(6x' + \alpha')\Big(1 + \frac{dx^2}{ds^2}\Big)\Big].$$

De ces différents résultats, on déduira la valeur complète de $\int_{,}V^2\cos\lambda d\sigma$. On obtiendra de même celle des deux autres intégrales $\int_{,}V^2\cos\mu d\sigma$ et $\int_{,}V^2\cos\nu d\sigma$, de sorte que l'on aura finalement

$$\left.\begin{aligned}
\int_{,}V^2\cos\lambda d\sigma &= \frac{1}{2}\pi l^4\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{6}\pi\varepsilon l^4X' \\
&\quad + \frac{4\pi\varepsilon l^5}{15}[(f'-f)pP + (f-f'')qQ + (f''-f')rR], \\
\int_{,}V\cos\mu d\sigma &= \frac{1}{2}\pi l^4\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{6}\pi\varepsilon l^4Y' \\
&\quad + \frac{4\pi\varepsilon l^5}{15}[(f'-f)pP' + (f-f'')qQ' + (f''-f')rR'], \\
\int_{,}V^2\cos\nu d\sigma &= \frac{1}{2}\pi l^4\frac{ds}{dt}\frac{dz}{dt} - \frac{1}{6}\pi\varepsilon l^4Z' \\
&\quad + \frac{4\pi\varepsilon l^5}{15}[(f'-f)pP'' + (f-f'')qQ'' + (f''-f')rR''],
\end{aligned}\right\}\ (J).$$

où l'on a fait pour abréger,

$$\Big(x'^2\frac{dx}{ds} + 2\alpha x'\frac{ds}{dt}\Big)f'' + \Big(y'^2\frac{dx}{ds} + 26y'\frac{ds}{dt}\Big)f' + \Big(z'^2\frac{dx}{ds} + 2\gamma z'\frac{ds}{dt}\Big)f = X',$$
$$\Big(x'^2\frac{dy}{ds} + 2\alpha' x'\frac{ds}{dt}\Big)f'' + \Big(y'^2\frac{dy}{ds} + 26'y'\frac{ds}{dt}\Big)f' + \Big(z'^2\frac{dy}{ds} + 2\gamma' z'\frac{ds}{dt}\Big)f = Y',$$
$$\Big(x'^2\frac{dz}{ds} + 2\alpha'' x'\frac{ds}{dt}\Big)f'' + \Big(y'^2\frac{dz}{ds} + 26''y'\frac{ds}{dt}\Big)f' + \Big(z'^2\frac{dz}{ds} + 2\gamma'' z'\frac{ds}{dt}\Big)f = Z',$$

$$\frac{dx}{ds}\,\frac{dt}{ds}\,y'z' - \beta\gamma\,\frac{dx}{dt}\,\frac{dx^2}{ds^2} + \tfrac{1}{2}(\gamma y' + \beta z')\left(1 + \frac{dx^2}{ds^2}\right) = \mathrm{P},$$
$$\frac{dy}{ds}\,\frac{dt}{ds}\,z'x' - \gamma\alpha\,\frac{dx}{dt}\,\frac{dx^2}{ds^2} + \tfrac{1}{2}(\alpha z' + \gamma x')\left(1 + \frac{dx^2}{ds^2}\right) = \mathrm{Q},$$
$$\frac{dz}{dt}\,\frac{dt}{ds}\,x'y' - \alpha\beta\,\frac{dx}{dt}\,\frac{dx^2}{ds^2} + \tfrac{1}{2}(\beta x' + \alpha y')\left(1 + \frac{dx^2}{ds^2}\right) = \mathrm{R},$$
$$\frac{dy}{ds}\,\frac{dt}{ds}\,y'z' - \beta'\gamma'\,\frac{dy}{dt}\,\frac{dy^2}{ds^2} + \tfrac{1}{2}(\gamma' y' + \beta' z')\left(1 + \frac{dy^2}{dt^2}\right) = \mathrm{P}',$$
$$\frac{dy}{ds}\,\frac{dt}{ds}\,z'x' - \gamma'\alpha'\,\frac{dy}{dt}\,\frac{dy^2}{ds^2} + \tfrac{1}{2}(\alpha' z' + \gamma' x')\left(1 + \frac{dy^2}{dt^2}\right) = \mathrm{Q}',$$
$$\frac{dy}{ds}\,\frac{dt}{ds}\,x'y' - \alpha'\beta'\,\frac{dy}{dt}\,\frac{dy^2}{ds^2} + \tfrac{1}{2}(\beta' x' + \alpha' y')\left(1 + \frac{dy^2}{ds^2}\right) = \mathrm{R}',$$
$$\frac{dz}{ds}\,\frac{dt}{ds}\,y'z' - \beta''\gamma''\,\frac{dz}{dt}\,\frac{dz^2}{ds^2} + \tfrac{1}{2}(\gamma'' y' + \beta'' z')\left(1 + \frac{dz^2}{ds^2}\right) = \mathrm{P}'',$$
$$\frac{dz}{ds}\,\frac{dt}{ds}\,z'x' - \gamma''\alpha''\,\frac{dz}{dt}\,\frac{dz^2}{ds^2} + \tfrac{1}{2}(\alpha'' z' + \gamma'' y')\left(1 + \frac{dz^2}{ds^2}\right) = \mathrm{Q}'',$$
$$\frac{dz}{ds}\,\frac{dt}{ds}\,x'y' - \alpha''\beta''\,\frac{dz}{dt}\,\frac{dz^2}{ds^2} + \tfrac{1}{2}(\beta'' x' + \alpha'' y')\left(1 + \frac{dz^2}{ds^2}\right) = \mathrm{R}''.$$

On peut remarquer que les permutations tournantes dont on a rappelé l'usage dans le n° 13, s'appliquent à ces formules et à leurs diverses parties, soit par rapport aux quantités relatives aux axes des $x_,$, $y_,$, $z_,$, soit relativement à celles qui répondent aux axes des x, y, z.

(25). Le volume du projectile étant équivalent à $\frac{4\pi l}{3}$, et en désignant par D′ sa densité, on aura

$$m = \frac{4\pi l\,\mathrm{D}'}{3},$$

pour la valeur de sa masse. D'après les expressions connues des moments d'inertie principaux d'un ellipsoïde homogène, on aura aussi

$$\mathrm{A} = \frac{2ml^2}{5}\left(1 - \tfrac{1}{2}\,\varepsilon f''\right),\quad \mathrm{B} = \frac{2ml^2}{5}\left(1 - \tfrac{1}{2}\,\varepsilon f'\right),\quad \mathrm{C} = \frac{2ml^2}{5}\left(1 - \tfrac{1}{2}\,\varepsilon f\right),$$

en observant qu'on a $f + f' + f'' = 0$, et négligeant le carré de ε. Je fais, pour abréger,

$$\frac{n\pi D l^2}{2m} = \frac{3nD}{8D'l} = \mu;$$

de sorte que $\frac{1}{\mu}$ soit ici, comme dans le n° 15, une ligne d'une longueur donnée; au moyen des formules (I) et (J), les équations (A) deviendront

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{l\mu}{3}X' - \frac{8l\mu l}{15}[(f'-f)pP + (f-f'')qQ + (f''-f')rR],\\
&\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{l\mu}{3}Y' - \frac{8l\mu l}{15}[(f'-f)pP' + (f-f'')qQ' + (f''-f')rR'],\\
&\frac{d^2z}{dt^2} + \mu\frac{ds}{dt}\frac{dz}{dt} + g = \frac{l\mu}{3}Z' - \frac{8l\mu l}{15}[(f'-f)pP'' + (f-f'')qQ'' + (f''-f')rR''],\\
&\qquad\frac{dp}{dt} + \frac{1}{2}s(f'-f)rq = \frac{4l\mu}{3}(f-f')y'z',\\
&\qquad\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}s(f-f'')pr = \frac{4l\mu}{3l}(f''-f)z'x',\\
&\qquad\frac{dr}{dt} + \frac{1}{2}s(f''-f')qp = \frac{4l\mu}{3l}(f'-f'')x'y'.
\end{aligned}\right\} \quad (K)$$

La question est donc réduite à intégrer le système de ses six équations, jointes aux trois équations (1), et aux valeurs connues de α, 6, etc., en fonctions, de ψ, φ, θ, qui sont, d'après la remarque du n° 2,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi,\\
6 &= \cos\theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi,\\
\gamma &= -\sin\theta\sin\psi,\\
\alpha' &= \cos\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi,\\
6' &= \cos\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi,\\
\gamma' &= -\sin\theta\cos\psi,\\
\alpha'' &= \sin\theta\sin\varphi,\\
6'' &= \sin\theta\cos\varphi,\\
\gamma'' &= \cos\theta.
\end{aligned}$$

Les seconds membres des trois dernières équations (K) renfermant les composantes x', y', z', de la vitesse du centre G suivant les axes

$Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, il s'ensuit que le mouvement de rotation n'est pas indépendant de celui de translation, ainsi que cela avait lieu dans le paragraphe précédent. Lorsqu'on fait abstraction des seconds membres des six équations, les trois dernières s'intègrent sous forme finie, au moyen des fonctions elliptiques, et les trois premières au moyen d'intégrales d'une forme particulière, qui ne contiennent aussi qu'un seul paramètre. Mais quand on a égard aux seconds membres, on ne peut plus séparer les variables dans ce système d'équations différentielles, et ramener leur intégration aux quadratures. De plus, si la vitesse de projection du mobile est très grande, comme celle des projectiles de l'artillerie, ce ne sera que pour le cas d'une valeur extrêmement petite de ϵ, et par des formules très compliquées, que l'on parviendra, en général, à exprimer les valeurs suffisamment approchées des inconnues du problème, qui se déduisent de ces équations. C'est pourquoi, afin de simplifier les résultats et d'en rendre l'application plus utile, nous en restreindrons la généralité par des hypothèses convenables, l'une relative à la direction du mouvement de translation, et l'autre à la direction de l'axe de rotation.

(26). Je supposerai d'abord que la trajectoire du centre G s'écarte très peu de la droite horizontale Ox; ce qui exige que $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dz}{ds}$ soient de très petites fractions dans toute l'étendue de cette courbe. En négligeant leurs carrés, nous aurons donc $\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}$, pendant toute la durée du mouvement; et à son origine, nous aurons aussi

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = ab,$$

en observant qu'à cette époque la vitesse de G est dirigée, par hypothèse, dans le plan des x et z, et désignant par a cette vitesse initiale, et par b l'angle que fait sa direction avec l'axe Ox. L'angle b, très petit, sera supposé positif, afin que le projectile soit lancé au-dessus du plan de x et y. On considérera seulement la partie de la trajectoire de son centre G située au-dessus de ce plan horizontal.

Abstraction faite des termes dépendants de ε, les trois premières équations (K) se réduiront à

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx^2}{dt^2} = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} = 0,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt} + g = 0.$$

En intégrant et ayant égard aux valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, relatives à $t = 0$, on aura, à un instant quelconque,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{1+\mu at}, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{a\zeta}{1+\mu at},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{g}{2\mu a^2} = g', \quad b + g' - g'(1+\mu at)^2 = \zeta,$$

et où g' et ζ devront être des quantités du même ordre de petitesse que b, afin que le rapport de $\frac{dz}{dt}$ à $\frac{dx}{dt}$ demeure toujours une très petite fraction. Par conséquent, si nous représentons par εu, εv, εw, les parties de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, qui dépendent de ε, il en résultera

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{1+\mu at} + \varepsilon u, \quad \frac{dy}{dt} = \varepsilon v, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{a\zeta}{1+\mu at} + \varepsilon w,$$

pour les valeurs complètes de ces trois composantes de la vitesse du centre G, dans lesquelles u, v, w, seront de nouvelles inconnues qui devront être nulles pour $t = 0$, puisque les premières valeurs satisfaisaient déjà aux conditions initiales.

En substituant ces expressions dans les équations (K), on négligera les termes εu, εv, εw, dans leurs seconds membres qui ont ε pour fac-

teur, et leurs carrés dans les premiers membres. D'après les formules (13), on aura donc

$$x' = \frac{a(\alpha + \alpha''\zeta)}{1+\mu at}, \quad y' = \frac{a(6 + 6''\zeta)}{1+\mu at}, \quad z' = \frac{a(\gamma + \gamma''\zeta)}{1+\mu at},$$

et, en même temps,

$$X' = \frac{a^2\text{T}}{(1+\mu at)^2}, \quad Y' = \frac{a^2\text{T}'}{(1+\mu at)^2}, \quad Z' = \frac{a^2\text{T}''}{(1+\mu at)^2},$$

en faisant, pour abréger,

$$3(\alpha^2 f'' + 6^2 f' + \gamma^2 f) + 4\zeta(\alpha\alpha'' f'' + 66'' f' + \gamma\gamma'' f) = \text{T},$$
$$2(\alpha\alpha' f'' + 66' f' + \gamma\gamma' f) + 2\zeta(\alpha'\alpha'' f'' + 6'6'' f' + \gamma'\gamma'' f) = \text{T}',$$
$$2(\alpha\alpha'' f'' + 66'' f' + \gamma\gamma'' f) + \zeta[(\alpha^2 + 2\alpha''^2) f'' + (6^2 + 26''^2) f' + (\gamma^2 + 2\gamma''^2) f] = \text{T}''.$$

Quant aux termes qui dépendent de p, q, r, dans les seconds membres des trois premières équations (K), ils sont très petits par rapport à ceux qui les précèdent, à cause de leur facteur l qui sera toujours une ligne d'une très petite longueur, et à raison des hypothèses que l'on fera tout-à-l'heure sur leurs autres facteurs $(f'-f)p$, $(f-f'')q$, $(f''-f')r$; nous les négligerons, en conséquence, dès à présent; et, de cette manière, on trouvera, pour ces équations,

$$\frac{du}{dt} + \frac{2\mu au}{1+\mu at} + \frac{\mu a\zeta w}{1+\mu at} = \frac{\mu a^2\text{T}}{3(1+\mu at)^2},$$
$$\frac{dv}{dt} + \frac{\mu av}{1+\mu at} = \frac{\mu a^2\text{T}'}{3(1+\mu at)^2},$$
$$\frac{dw}{dt} + \frac{\mu aw}{1+\mu at} = \frac{\mu a^2\text{T}''}{3(1+\mu at)^2},$$

en supprimant le facteur ϵ, commun aux deux membres de chacune d'elles. Avant cette suppression, le premier membre de la première renfermait les deux termes :

$$\frac{\mu a^2\zeta^2}{2(1+\mu at)^2} + \frac{\mu a\zeta w}{1+\mu at}.$$

On a conservé le deuxième parce qu'il est semblable à d'autres termes du second membre; mais on verra par la suite qu'il n'influe pas sensiblement sur le mouvement du projectile. On a, au contraire, négligé le premier, qui est indépendant de ε, mais de l'ordre de petitesse de ζ ou b^2, c'est-à-dire, de l'ordre du carré de $\frac{dz}{dt}$. Toutefois, si l'on jugeait utile de le rétablir, il en résulterait dans u et x, des termes négatifs que je désignerai par $-n$ et $-n'$, et tels que l'on aurait

$$n = \frac{\mu a^2}{2(1+\mu a t)^2}\int \zeta dt, \quad n' = \int n dt,$$

en prenant les intégrales de manière qu'elles s'évanouissent quand $t = 0$.

On déduit des deux dernières de nos trois équations

$$v = \frac{\mu a^2}{3(1+\mu a t)}\int \frac{T' dt}{1+\mu a t}, \quad w = \frac{\mu a^2}{3(1+\mu a t)}\int \frac{T'' dt}{1+\mu a t};$$

et au moyen de cette valeur de w, la première donne

$$u = \frac{\mu a^2}{3(1+\mu a t)}\left[\int T dt - \zeta_{,}(1+\mu a t)\int \frac{T'' dt}{1+\mu a t} + \int T'' \zeta_{,} dt\right],$$

en faisant, pour abréger,

$$(b + g' - {}_{2}g'(1+\mu a t)^2 = \zeta_{,},$$

et observant que l'on aura, par l'intégration par partie,

$$\int\left(\zeta_{,}\mu a dt \cdot \int \frac{T'' dt}{1+\mu a t}\right) = \zeta_{,}(1+\mu a t)\int \frac{T'' dt}{1+\mu a t} - \int T'' \zeta_{,} dt.$$

Je substitue ces valeurs dans celles de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; les valeurs de x, y, z, qu'on en déduira, renfermeront des intégrales doubles qui se convertiront comme cette dernière, en intégrales simples; et il en résultera

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\mu}\log(1+\mu at) - \frac{1}{3}\epsilon a\left(\zeta'\int\frac{T''dt}{1+\mu at} - \int\frac{T''\zeta'dt}{1+\mu at}\right) \\
&\quad - \frac{1}{3}\epsilon a\left[\frac{1}{1+\mu at}\int(T+T''\zeta_{,})\,dt - \int\frac{(T+T''\zeta_{,})\,dt}{1+\mu at}\right], \\
y &= \tfrac{1}{3}\epsilon a\log(1+\mu at)\int\frac{T'dt}{1+\mu at} - \tfrac{1}{3}\epsilon a\int\frac{T'\log(1+\mu at)}{1+\mu at}\,dt, \\
z &= \frac{1}{\mu}\left[(b+g')\log(1+\mu at) - \frac{1}{2}g'(1+\mu at)^2 + \frac{1}{2}g'\right] \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\epsilon a\log(1+\mu at)\int\frac{T''dt}{1+\mu at} - \tfrac{1}{3}\epsilon a\int\frac{T''\log(1+\mu at)}{1+\mu at}\,dt,
\end{aligned}\right\}\ (L)$$

en faisant, pour abréger,

$$(b+g')\log(1+\mu at) - \tfrac{1}{2}g'(1+\mu at)^2 = \zeta',$$

de sorte que ζ' soit, ainsi que $\zeta_{,}$, une quantité de l'ordre de petitesse de b. Toutes les intégrales indiquées dans ces diverses formules commenceront avec t, afin que les quantités u, v, w, x, y, z, soient nulles pour $t=0$.

Ces formules feront connaître les trois coordonnées x, y, z, du centre G à un instant quelconque, lorsque les quantités α, 6, etc., qui entrent dans les expressions de T, T′, T″, auront été déterminées en fonctions de t. On peut remarquer que ces expressions deviennent beaucoup plus simples, et qu'on en peut éliminer immédiatement six des neuf inconnues α, 6, etc., quand le mobile est un solide de révolution. Si G$z_{,}$, par exemple, est son demi-axe de figure, les quantités f' et f'' qui se rapportent aux deux autres seront égales. A cause de l'équation $f+f'+f''=0$; qui laisse indéterminée une des trois constantes f, f', f'', on aura $f'=f''=-1$, en prenant $f=2$; et, en vertu des équations (12), les expressions de T, T′, T″, se réduiront à

$$\begin{aligned}
T &= 3(3\gamma^2 - 1) + 4\gamma\gamma''\zeta, \\
T' &= 2\gamma\gamma' + 2\gamma'\gamma''\zeta, \\
T'' &= 2\gamma\gamma'' + 3(\gamma^2 + 2\gamma''^2 - 1)\zeta;
\end{aligned}$$

en sorte qu'elles ne contiendront plus que les trois inconnues γ, γ', γ''. D'après l'équation de l'ellipsoïde (n° 23), son axe de figure aura $2l + 2\epsilon l$ pour longueur; chacun des deux autres axes sera égal à $2l - \epsilon l$; il sera donc allongé ou aplati, selon que la fraction ϵ aura une valeur positive ou négative; et abstraction faite du signe, $\frac{3\epsilon}{2}$ exprimera la mesure de sa non-sphéricité, c'est-à-dire, la différence entre son plus grand et son plus petit diamètre, divisée par son diamètre moyen.

(27). A l'égard du mouvement de rotation, on supposera que l'axe instantané GI s'écarte constamment très peu de l'un des demi-axes de l'ellipsoïde, par exemple de $Gz_{\prime}$ ou de son prolongement; ce qui exigera qu'à l'origine du mouvement et pendant toute sa durée, les vitesses p et q soient très petites par rapport à r. Cette hypothèse suffirait, sans qu'il fût nécessaire d'en ajouter aucune autre relativement aux quantités f, f', f'', pour qu'on pût calculer les valeurs de p, q, r, et celles des angles φ, ψ, θ, en fonctions de t; mais afin de simplifier le calcul, je supposerai en outre que l'ellipsoïde soit de révolution et que $Gz_{\prime}$ appartienne à son axe de figure.

Dans ce cas, on pourra prendre pour $Gx_{\prime}$, tel rayon que l'on voudra, de la section du mobile perpendiculaire à l'axe de figure et passant par le point G; pour fixer les idées, je supposerai que ce demi-axe soit le rayon qui coïncidait, à l'origine du mouvement, avec la droite GL dirigée vers le nœud ascendant de cette section sur le plan horizontal des x et y; ce qui rendra nulle la valeur de l'angle φ ou $x_{\prime}$GL, qui répond à $t = 0$. Le demi-axe $Gy_{\prime}$ sera le rayon perpendiculaire, à cette même époque, à la droite GL et situé au-dessus du plan des x et y; la rotation initiale autour de $Gz_{\prime}$, aura donc lieu de $Gx_{\prime}$ vers $Gy_{\prime}$; par conséquent, la valeur initiale de r sera positive, et ce sera du demi-axe $Gz_{\prime}$ même, et non de son prolongement, que l'axe instantané GI s'écartera très peu. Le sens de cette rotation sera donné, et fera connaître si l'angle dièdre, formé des deux angles $y_{\prime}$GL et xGL, est aigu ou obtus, et conséquemment si $Gz_{\prime}$ est la partie de l'axe de figure qui se trouvait primitivement au-dessus ou au-dessous du plan des x

et y. Enfin les valeurs initiales de cet angle dièdre et de l'angle LGx, compté vers la droite GL à partir de Gx, seront données; ce qui déterminera complétement la position du mobile à l'origine de son mouvement. Ces valeurs seront celles des angles θ et ψ qui répondent à $t=0$, et qu'il faudra joindre à $\varphi=0$.

En faisant $f''=f'$, dans la dernière équation (K), elle se réduira à $dr=0$, et donnera $r=c$, en désignant par c une constante positive. Si l'on néglige les carrés de p et q, on aura $\omega=c$, pour la vitesse angulaire du mobile; ce corps tournera donc uniformément et toujours dans le même sens, mais autour d'un axe GI qui coïncidera successivement avec différents rayons de cet ellipsoïde, et ne restera pas non plus parallèle à lui-même pendant le mouvement du point G. En appelant à un instant quelconque, ξ l'angle $IGz_{\prime}$, et χ l'angle compris entre $Gx_{\prime}$ et la projection de GI sur le plan des $x_{\prime}$ et $y_{\prime}$, compté à partir de $Gx_{\prime}$, dans le sens de la rotation autour de $Gz_{\prime}$, on aura

$$p=c\xi\cos\chi,\quad q=c\xi\sin\chi;$$

d'où l'on tire

$$\xi=\frac{1}{c}\sqrt{p^2+q^2},\quad \chi=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{q}{p}\right),$$

pour les formules relatives à la direction de l'axe variable GI, dans l'intérieur du mobile. Si l'on désigne par a' et b' les valeurs de p et q relatives à $t=0$, les rapports $\frac{a'}{c}$ et $\frac{b'}{c}$ devront être de très petites fractions positives ou négatives, et les trois constantes a', b', c, détermineront en grandeur et en direction, la vitesse initale de rotation.

Cela posé, si l'on fait $f=2$, $f'=-1$, $f''=-1$, $r=c$, dans la quatrième et la cinquième équation (K); que l'on substitue dans leurs seconds membres, les valeurs de x', y', z', du numéro précédent; et que l'on néglige le carré de ζ, elles deviendront

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dt} - \frac{3}{2}\,\varepsilon cq &= \frac{4\varepsilon\mu a^2}{l(1+\mu a l)^2}(\beta\gamma + \beta''\gamma\zeta + \beta\gamma''\zeta),\\ \frac{dq}{dt} + \frac{3}{2}\,\varepsilon cp &= -\frac{4\varepsilon\mu a^2}{l(1+\mu a l)^2}(\alpha\gamma + \alpha''\gamma\zeta + \alpha\gamma''\zeta).\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{M})$$

Or, ponr que les vitesses p et q demeurent constamment très petites, il faudra que les seconds membres de ces deux équations soient aussi de très petites quantités; à raison de la petitesse de l et de la grandeur de a, leur facteur commun n'est pas très petit, à moins que ε ne soit une fraction extrêmement petite; il faudra donc, en général, que les premiers termes $\beta\gamma$ et $\alpha\gamma$ des trinomes contenus entre les parenthèses, soient de très petites quantités de l'ordre de la fraction ζ; ce qui arrivera, soit quand γ sera constamment nne très petite fraction, soit quand cela aura lieu pour α et pour β. Le second cas se présente effectivement dans le tir de la *carabine* rayée en *hélices;* et pour cette raison, nous allons donner à son examen, tous les développements que l'importance de la question exige.

(28). On suppose l'inclinaison des hélices constante et la même pour toutes. En vertu de cette inclinaison, soit i la longueur d'une portion de l'axe, pour laquelle chaque hélice, prolongée s'il est nécessaire, ferait un tour entier. Immédiatement avant de sortir de la carabine, le centre G de la balle parcourra pendant un temps τ très court, une longueur $a\tau$ sur l'axe de l'arme; dans le même temps, la fraction d'un tour entier qu'elle achèvera, sera donc à la circonférence 2π, comme $a\tau$ est à i, ou égale à $\frac{2\pi a\tau}{i}$; par conséquent en divisant par τ, on aura

$$c = \frac{2\pi a}{i},$$

pour la vitesse angulaire de rotation dont le mobile se trouvera animé en sortant de la carabine, et qui aura lieu autour du prolongement de l'axe, c'est-à-dire à très peu près autour de la direction initiale et donnée de la vitesse du centre G. Je dis à *très peu près* pour plus de

généralité, et afin de comprendre dans les calculs suivants, le cas où par suite d'une petite inégalité entre les inclinaisons des différentes hélices, ou par toute autre cause, la direction initiale de G ne coïnciderait pas exactement avec l'axe de l'arme prolongé au dehors. D'après cette valeur de c, la balle fera sur elle-même, dans chaque unité de temps, un nombre de révolutions égal à $\frac{a}{i}$, ou, autrement dit, la durée de chaque révolution aura $\frac{i}{a}$ pour valeur.

Par hypothèse, l'axe de rotation s'écartant très peu de Gz_i, il s'ensuit qu'à l'origine du mouvement, ce demi-axe devra faire, ou un très petit angle, ou un angle très peu différent de 180°, avec la direction du centre G, et conséquemment un angle très peu différent de 90° avec l'axe des z. En même temps, la droite GL devra être à très peu près perpendiculaire au plan des x et z, où est comprise cette direction; cette droite s'écartera donc très peu de l'axe des y ou de son prolongement, c'est-à-dire, que la valeur initiale de l'angle ψ différera très peu de trois fois 90° ou de 90°, selon que la partie supérieure du mobile tournera de gauche à droite ou de droite à gauche; par conséquent, si l'on désigne par h et k des angles très petits, positifs ou négatifs, on aura

$$\theta = 90^\circ + h, \quad \psi = 270^\circ + k \quad \text{ou} \quad \psi = 90^\circ + k,$$

pour $t = 0$.

Dans le cas de la première valeur de ψ, ou de la rotation de gauche à droite, le demi-axe Gz_i appartiendra à la partie antérieure du projectile, et fera un très petit angle avec la direction du centre G; dans le cas de la seconde valeur, ou de la rotation de droite à gauche, il appartiendra à la partie postérieure, et ce sera un angle très peu différent de 180° qu'il fera avec cette direction. En effet, dans le premier cas, selon que le demi-axe de figure compris dans la partie antérieure du mobile, tombera au-dessus ou au-dessous du plan des x et y, l'angle dièdre formé de l'angle LGx, égal à $270^\circ + k$, et de

l'angle $LGy_{,}$, sera un peu plus petit ou un peu plus grand que $90°$; ce qui suffira pour que $Gz_{,}$ tombe également au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, et coïncide avec le demi-axe antérieur : au contraire, dans le second cas, selon que ce demi-axe tombera au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, l'angle dièdre formé de LGx, égal $90° + k$, et de l'angle $LGy_{,}$, sera obtus ou aigu, et $Gz_{,}$ tombera, en conséquence, au-dessous ou au-dessus du plan des x et y; ce qui le fera coïncider avec le demi-axe appartenant à la partie postérieure du projectile.

Pour qu'à l'origine du mouvement, ce corps tourne exactement autour de la droite suivant laquelle le centre G sera lancé, il faudra que l'on ait d'abord $k=0$; il faudra en outre que le demi-axe $Gz_{,}$ soit dirigé dans le sens même de la vitesse initiale de G, ou en sens directement contraire; ce qui exigera que l'on ait aussi $h=\mp b$, selon que $Gz_{,}$ tombera au-dessus ou au-dessous du plan des x et y, c'est-à-dire, selon que la rotation aura lieu de gauche à droite, ou de droite à gauche. Si l'on veut de plus que la direction initiale de l'axe instantané GI coïncide parfaitement avec $Gz_{,}$, il faudra que a' et b' soient zéro. Mais généralement les constantes h, k, $\frac{a'}{c}$, $\frac{b'}{c}$, seront de très petites fractions positives ou négatives dont les valeurs proviendront de ce que, dans l'intérieur de la carabine, l'axe de figure de la balle n'aura pas tout-à-fait coïncidé avec l'axe de l'arme, et de ce qu'en sortant, l'axe de rotation se sera aussi écarté, un tant soit peu, du premier axe et du prolongement du second.

Maintenant les deux premières équations (1) donnent

$$\sin\theta\frac{d\psi}{dt} = -p\sin\varphi - q\cos\varphi,$$
$$\frac{d\theta}{dt} = p\cos\varphi - q\sin\varphi;$$

les vitesses p et q ayant été supposées constamment très petites, on en conclut que les vitesses $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$, le seront aussi, dans le cas, du moins,

où θ n'est pas un très petit angle ; par conséquent ψ et θ s'écarteront constamment très peu de leurs valeurs initiales ; et si l'on désigne par Ψ et Θ des angles très petits, positifs ou négatifs, dont les valeurs soient h et k pour $t = 0$, on aura, à un instant quelconque,

$$\theta = 90^\circ + \Theta, \quad \psi = 270^\circ + \Psi \quad \text{ou} \quad \psi = 90^\circ + \Psi.$$

Nous négligerons les carrés et les produits de Θ, Ψ, $\frac{d\Theta}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$. La troisième équation (1) donnera alors $d\varphi = cdt$, et conséquemment $\varphi = ct$, à cause de $\varphi = 0$ quand $t = 0$. Les équations précédentes deviendront ensuite

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= -\,p \sin ct - q \cos ct, \\ \frac{d\Theta}{dt} &= p \cos ct - q \sin ct. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(N)}$$

On aura, en même temps,

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm\,\Theta \sin ct \pm \Psi \cos ct, & \alpha'' &= \sin ct, \\ \beta &= \pm\,\Theta \cos ct \mp \Psi \sin ct, & \beta'' &= \cos ct, \\ \gamma &= \pm\,1, & \gamma'' &= -\,\Theta; \end{aligned}$$

les signes supérieurs répondant au cas où la rotation a lieu de gauche à droite, et les signes inférieurs à celui où elle se fait de droite à gauche. Les équations (M) se changeront en celles-ci :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} - \frac{3}{2}\varepsilon cq &= \lambda(\Theta \cos ct - \Psi \sin ct \pm \zeta \cos ct), \\ \frac{dq}{dt} + \frac{3}{2}\varepsilon cp &= -\,\lambda(\Theta \sin ct + \Psi \cos ct \pm \zeta \sin ct), \end{aligned}\right\} \quad \text{(O)}$$

en négligeant les produits $\zeta\Theta$ et $\zeta\Psi$, et faisant, pour abréger,

$$\frac{4\mu a^2}{k(1+\mu a)^2} = \lambda.$$

Il s'agira donc d'intégrer le système de ces quatre équations (N) et

(O), du premier ordre, linéaires et à coefficients variables; ce qui est possible, ainsi qu'on va le voir.

(29). A moins que l'inclinaison des hélices ne soit très faible ou tout-à-fait nulle, la vitesse angulaire c sera très grande, à raison de la grandeur de la vitesse de projection a. Si celle-ci est, par exemple, de 400 mètres par seconde, et que chaque hélice fasse un tour entier pour une longueur i de son axe, égale à six mètres, la vitesse c sera à peu près égale à ce nombre 400, en prenant la seconde pour unité de temps, ou d'environ 60 tours par seconde. Les quantités $\sin ct$ et $\cos ct$ varieront donc, en général, très rapidement; or, si l'on désigne par p', $p_{,}$, q', $q_{,}$, θ', $\theta_{,}$, ψ', $\psi_{,}$, huit inconnues indépendantes de l'angle ct, et qui varieront avec beaucoup moins de rapidité, on pourra satisfaire aux équations (N) et (O), par les expressions:

$$\begin{aligned} p &= p' \cos ct + q' \sin ct + p_{,}, \\ q &= q' \cos ct - p' \sin ct + q_{,}, \\ \Theta &= \theta' \cos ct + \psi' \sin ct + \theta_{,}, \\ \Psi &= \psi' \cos ct - \theta' \sin ct + \psi_{,}; \end{aligned}$$

car en les substituant dans ces équations et égalant, dans les deux membres de chacune d'elles, les coefficients de $\sin ct$, $\cos ct$, et les termes indépendants de ct, les douze équations que l'on obtiendra de cette manière, se réduiront à huit, c'est-à-dire à un nombre d'équations distinctes, égal à celui des inconnues. On trouvera pour ces huit équations

$$\begin{aligned} &\frac{dp'}{dt} + \left(1 - \tfrac{3}{2}\epsilon\right) cq' = \lambda(\theta_{,} \pm \zeta), \\ &\frac{dq'}{dt} - \left(1 - \tfrac{3}{2}\epsilon\right) cp' = -\lambda\psi_{,}, \\ &\frac{d\psi'}{dt} - c\theta' = -q_{,}, \\ &\frac{d\theta'}{dt} + c\psi' = p_{,}, \end{aligned}$$

$$\frac{dp_{\prime}}{dt} - \frac{3}{2}\epsilon c q_{\prime} = \lambda\theta',$$
$$\frac{dq_{\prime}}{dt} + \frac{3}{2}\epsilon c p_{\prime} = -\lambda\psi',$$
$$\frac{d\psi_{\prime}}{dt} = -q',$$
$$\frac{d\theta_{\prime}}{dt} = p'.$$

Mais si l'on néglige, dans les quatre premières, $\frac{dp'}{dt}$ et $\frac{dq'}{dt}$ par rapport à cq' et cp', ainsi que $\frac{d\psi'}{dt}$ et $\frac{d\theta'}{dt}$ relativement à $c\theta'$ et $c\psi'$, et si l'on y met l'unité au lieu de $1 - \frac{3}{2}\epsilon$, on en déduira

$$q' = \frac{\lambda}{c}(\theta_{\prime} \pm \zeta), \quad p' = \frac{\lambda}{c}\psi_{\prime}, \quad \theta' = \frac{1}{c}q_{\prime}, \quad \psi' = \frac{1}{c}p_{\prime};$$

et, en substituant dans les quatre dernières, ces valeurs de q', p', θ', ψ', il en résultera

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_{\prime}}{dt} - \left(\frac{3}{2}\epsilon c + \frac{\lambda}{c}\right)q_{\prime} = 0,\\
&\frac{dq_{\prime}}{dt} + \left(\frac{3}{2}\epsilon c + \frac{\lambda}{c}\right)p_{\prime} = 0,\\
&\frac{d\psi_{\prime}}{dt} + \frac{\lambda}{c}\theta_{\prime} = \mp\frac{\lambda}{c}\zeta,\\
&\frac{d\theta_{\prime}}{dt} - \frac{\lambda}{c}\psi_{\prime} = 0;
\end{aligned}\right\} \text{(P)}$$

équations dont les intégrales contiendront quatre constantes arbitraires, au moyen desquelles les expressions que l'on a prises pour $p_{\prime}$, $q_{\prime}$, $\theta_{\prime}$, $\psi_{\prime}$, seront les intégrales complètes des équations (N) et (O).

Des deux premières de ces équations (P), on tire

$$p_{\prime}dp_{\prime} + q_{\prime}dq_{\prime} = 0, \quad q_{\prime}dp_{\prime} - p_{\prime}dq_{\prime} = \left(\frac{3}{2}\epsilon c + \frac{\lambda}{c}\right)(q_{\prime}^2 + p_{\prime}^2)dt;$$

en intégrant, désignant par C et D les deux constantes arbitraires, et ayant égard à la valeur de λ, il vient

$$p_{\prime}^2 + q_{\prime}^2 = \text{C}, \quad \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{p_{\prime}}{q_{\prime}}\right) = \epsilon\left[\frac{3}{2}ct + \frac{4\mu a^3 t}{c l(1+\mu a t)}\right] + \text{D};$$

et si l'on représente par C' et D' deux autres constantes arbitraires, et

qu'on fasse, pour abréger,

$$\left[\frac{3}{2}c + \frac{4\mu a^2}{cl(1+\mu a t)}\right]\epsilon t = \lambda',$$

on en déduira

$$p_{,} = C'\sin\lambda' + D'\cos\lambda', \quad q_{,} = C'\cos\lambda' - D'\sin\lambda'.$$

Abstraction faite du second membre de la troisième équation (P), on déduirait de même, de cette équation et de la quatrième,

$$\theta_{,} = A\sin\lambda_{,} + B\cos\lambda_{,}; \quad \psi_{,} = A\cos\lambda_{,} - B\sin\lambda_{,},$$

en faisant aussi

$$\frac{4\mu a^2 t}{cl(1+\mu a t)} = \lambda_{,},$$

et désignant par A et B deux constantes arbitraires qu'il faudra changer en des quantités variables pour avoir égard à ce second membre. Pour déterminer les valeurs de ces nouvelles inconnues, on aura alors

$$\frac{dA}{dt}\sin\lambda_{,} + \frac{dB}{dt}\cos\lambda_{,} = 0, \quad \frac{dA}{dt}\cos\lambda_{,} - \frac{dB}{dt}\sin\lambda_{,} = \mp\frac{\lambda}{c}\zeta dt;$$

et par l'intégration, on en déduira

$$A = A' \mp \int\frac{\lambda\zeta}{c}\cos\lambda_{,}dt, \quad B = B' \pm \int\frac{\lambda\zeta}{c}\sin\lambda_{,}dt;$$

A' et B' étant les deux constantes arbitraires: pour fixer les idées, on supposera que les deux intégrales indiquées sont zéro en même temps que la variable t.

Au moyen de ces valeurs de A, B, $\theta_{,}$, $\psi_{,}$, $p_{,}$, $q_{,}$, et de celles de q', p', θ', ψ', les intégrales complètes des équations (N) et (O) seront

$$p = C'\sin\lambda' + D'\cos\lambda' \pm \frac{\lambda\zeta}{c}\sin ct$$
$$+ \frac{\lambda}{c}\left[\left(B' \pm \int\frac{\lambda\zeta}{c}\sin\lambda_{,}dt\right)\sin(ct-\lambda_{,}) + \left(A' \mp \int\frac{\lambda\zeta}{c}\cos\lambda_{,}dt\right)\cos(ct-\lambda_{,})\right],$$
$$q = C'\cos\lambda' - D'\sin\lambda' \pm \frac{\lambda\zeta}{c}\cos ct$$
$$+ \frac{\lambda}{c}\left[\left(B' \pm \int\frac{\lambda\zeta}{c}\sin\lambda_{,}dt\right)\cos(ct-\lambda_{,}) - \left(A' \mp \int\frac{\lambda\zeta}{c}\cos\lambda_{,}dt\right)\sin(ct-\lambda_{,})\right],$$

20..

$$\Theta = \left(A' \mp \int \frac{\lambda\zeta}{c}\cos\lambda_{,}dt\right)\sin\lambda_{,} + \left(B' \pm \int \frac{\lambda\zeta}{c}\sin\lambda_{,}dt\right)\cos\lambda_{,}$$
$$+ \tfrac{1}{c}[D'\sin(ct - \lambda') + C'\cos(ct - \lambda')],$$
$$\Psi = \left(A' \mp \int \frac{\lambda\zeta}{c}\cos\lambda_{,}dt\right)\cos\lambda_{,} - \left(B' \pm \int \frac{\lambda\zeta}{c}\sin\lambda_{,}dt\right)\sin\lambda_{,}$$
$$+ \tfrac{1}{c}[D'\cos(ct - \lambda') - C'\sin(ct - \lambda')].$$

En y faisant $t = 0$, et ayant égard aux valeurs initiales de p, q, θ, ψ, et à celles de λ et ζ, nous aurons

$$a' = D' + \frac{4\epsilon\mu a^2}{cl}A', \quad b' = C' + \frac{4\epsilon\mu a^2}{cl}(B' \pm b),$$
$$h = B' + \tfrac{1}{c}C', \qquad k = A' + \tfrac{1}{c}D'.$$

Je fais, en outre,

$$a' = ca_{,}, \quad b' = cb_{,}, \quad \frac{4\epsilon\mu a^2}{c^2 l} = f;$$

$a_{,}$ et $b_{,}$ seront de très petites fractions données: f exprimera aussi un nombre abstrait, mais qui ne sera pas généralement très petit, quoiqu'il ait ϵ pour facteur.

On tirera des équations précédentes

$$A' = \frac{a_{,} - k}{f - 1}, \qquad B' = \frac{b_{,} - h \mp bf}{f - 1},$$
$$C' = \frac{(hf \pm bf - b_{,})c}{f - 1}, \quad D' = \frac{(kf - a_{,})c}{f - 1};$$

on aura en même temps

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{cf}{(1 + \mu a t)^2}, \quad \int \frac{\lambda\zeta}{c}\cos\lambda_{,}dt = \lambda_1 f, \quad \int \frac{\lambda\zeta}{c}\sin\lambda_{,}dt = \lambda_2 f,$$

en faisant, pour abréger,

$$\int \frac{c\zeta \cos \lambda_{,} dt}{(1+\mu at)^2} = \lambda_1, \quad \int \frac{c\zeta \sin \lambda_{,} dt}{(1+\mu at)^2} = \lambda_2;$$

et il en résultera finalement

$$\left.\begin{aligned}
\frac{p}{c} &= \frac{hf \pm bf - b_{,}}{f-1} \sin \lambda' + \frac{kf - a_{,}}{f-1} \cos \lambda' \pm \frac{\zeta f}{(1+\mu at)^2} \sin ct \\
&+ \frac{f}{(1+\mu at)^2}\left[\left(\frac{b_{,} - h \mp bf}{f-1} \pm \lambda_2 f\right) \sin(ct - \lambda_{,}) + \left(\frac{a_{,} - k}{f-1} \mp \lambda_1 f\right) \cos(ct - \lambda_{,})\right], \\
\frac{q}{c} &= \frac{hf \pm bf - b_{,}}{f-1} \cos \lambda' \pm \frac{kf - a_{,}}{f-1} \sin \lambda' \pm \frac{\zeta f}{(1+\mu at)^2} \cos ct \\
&+ \frac{f}{(1+\mu at)^2}\left[\left(\frac{b_{,} - h \mp bf}{f-1} \pm \lambda_2 f\right) \cos(ct - \lambda_{,}) - \left(\frac{a_{,} - k}{f-1} \mp \lambda_1 f\right) \sin(ct - \lambda_{,})\right], \\
\Theta &= \left(\frac{a_{,} - k}{f-1} \mp \lambda_1 f\right) \sin \lambda_{,} + \left(\frac{b_{,} - h \mp bf}{f-1} \pm \lambda_2 f\right) \cos \lambda_{,} \\
&+ \frac{kf - a_{,}}{f-1} \sin(ct - \lambda') + \frac{hf \pm bf - b_{,}}{f-1} \cos(ct - \lambda'), \\
\Psi &= \left(\frac{a_{,} - k}{f-1} \mp \lambda_1 f\right) \cos \lambda_{,} - \left(\frac{b_{,} - h \mp bf}{f-1} \pm \lambda_2 f\right) \sin \lambda_{,} \\
&+ \frac{kf - a_{,}}{f-1} \cos(ct - \lambda') - \frac{hf \pm bf - b_{,}}{f-1} \sin(ct - \lambda').
\end{aligned}\right\} \quad (Q)$$

Les intégrales λ_1 et λ_2 ne pourront pas s'obtenir sous forme finie; on ne pourra pas non plus, pour en obtenir des valeurs approchées, y remplacer $\sin \lambda_{,}$ et $\cos \lambda_{,}$ par $\lambda_{,}$ et l'unité; car, malgré le facteur ct qui sera toujours une très petite fraction, la quantité $\lambda_{,}$, à cause de son autre facteur, aura pour valeur un nombre qui ne sera pas très petit.

(30). Ces formules (Q), en y joignant les équations $r = c$ et $\varphi = ct$, renfermeront les lois complètes de la rotation de la balle autour de son centre de gravité.

Si, à l'origine du mouvement, l'axe de figure et l'axe de rotation ont coïncidé l'un et l'autre avec la ligne suivant laquelle le centre G a été lancé, ce qui exige, comme on l'a dit plus haut, que l'on ait

$$h = \mp b, \quad k = 0, \quad a_{,} = 0, \quad b_{,} = 0,$$

les formules (Q) se réduiront à

$$\frac{p}{c} = \pm \frac{f}{(1+\mu a t)^2}[\zeta \sin ct - (b-\lambda_2 f)\sin(ct-\lambda_1) - \lambda_1 f \cos(ct-\lambda_1)],$$
$$q = \pm \frac{f}{(1+\mu a t)^2}[\zeta \cos ct - (b-\lambda_2 f)\cos(ct-\lambda_1) + \lambda_1 f \sin(ct-\lambda_1)],$$
$$\Theta = \mp [\lambda_1 f \sin \lambda_1 + (b-\lambda_2 f)\cos\lambda_1],$$
$$\Psi = \mp [\lambda_1 f \cos \lambda_1 - (b-\lambda_2 f)\sin\lambda_1].$$

L'angle *ct* entrant dans les deux premières formules et n'étant pas contenu dans les deux dernières, il s'ensuit que l'axe de rotation GI fera, dans l'intérieur du mobile, des oscillations très rapides autour du demi-axe Gz_1, tandis que celui-ci en fera de plus lentes dans l'espace. Les amplitudes des unes et des autres seront d'ailleurs constamment très petites. L'amplitude ξ des premières aura pour valeur (n° 27)

$$\xi = \frac{f}{(1+\mu a t)^2}\sqrt{\zeta^2 + (b-\lambda_2 f)^2 + \lambda_1 f^2 - 2\zeta[\lambda_1 f \sin\lambda_1 - (b-\lambda_2 f)\cos\lambda_1]}.$$

A raison du dénominateur $(1+\mu a t)^2$, elle diminuera donc continuellement pendant le mouvement. Elle diminuera aussi à cause du facteur f, à mesure que la vitesse c de rotation augmentera de plus en plus; et l'on pourra la regarder comme insensible, quand la longueur i de l'axe de l'arme, qui répond à un tour entier des hélices, ne sera qu'un multiple peu considérable du rayon l de la balle. Dans ce cas, le mobile tournera donc sensiblement autour de son axe de figure pendant toute la durée de son mouvement; ce qui n'empêchera pas cet axe de changer de direction et de tourner autour de la droite Gx.

En effet, à un instant quelconque, appelons σ l'angle que fait la projection de Gz_1 sur le plan perpendiculaire à Gx et mené par le point G, avec la verticale Gz; angle qui sera compté à partir de cette ligne, de Gz vers Gy ou en sens contraire, c'est-à-dire, de droite à gauche ou de gauche à droite, selon que σ sera positif ou négatif. Soit

aussi ρ l'angle $z_i G x$ à cette époque. D'après ce que γ' et γ'' représentent (n° 7), nous aurons

$$\gamma' = \sin\rho \sin\sigma, \quad \gamma'' = \sin\rho \cos\sigma;$$

mais, en négligeant les carrés et le produit de Θ et Ψ, on a

$$\gamma' = \mp \Psi, \quad \gamma'' = -\Theta;$$

on aura donc

$$\rho = \sqrt{\Psi^2 + \Theta^2}, \quad \sigma = \pm \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\Psi}{\Theta}\right);$$

et, dans le cas où l'on néglige f, il en résultera

$$\rho = b, \quad \sigma = \pm \lambda_i.$$

Or, cette valeur constante de ρ montre que Gz_i décrira autour de Gx, un cône droit dont l'ouverture ne dépendra pas de la vitesse c; de plus, l'angle λ_i étant une quantité positive, et le signe supérieur répondant au cas où la rotation du mobile a lieu de gauche à droite, et le signe inférieur au cas où elle se fait de droite à gauche, il s'ensuit que Gz_i tournera autour de Gx, dans le même sens que le projectile autour de Gz_i; mais l'angle λ_i n'étant pas proportionnel au temps, la rotation de Gz_i ne sera pas uniforme, comme celle du mobile, et les durées des révolutions de Gz_i varieront pendant le mouvement.

(31). Puisqu'en négligeant, comme plus haut, les carrés et les produits de Ψ et Θ, on a

$$\gamma = \pm 1, \quad \gamma' = \mp \Psi, \quad \gamma'' = -\Theta,$$

il en résultera pour les valeurs de T, T′, T″, relatives à un ellipsoïde de révolution

$$T = 6 \mp 4\theta\zeta;\quad T' = -2\Psi,\quad T'' = \mp 2\Theta;$$

et ce sont ces valeurs qu'il faudra employer dans les expressions de x, y, z, données par les équations (L).

Il faudra négliger T″, et le second terme de T dans les termes de x parce qu'ils dépendraient de l'une des variables ζ, ζ', $\zeta_{\prime}$, de l'ordre de petitesse de b, et qu'ils ont ϵ pour coefficient. On devra aussi négliger, sous les signes $\int$, les termes de y et z provenant de Ψ et Θ et qui contiendront $\sin(ct - \lambda')$ et $\cos(ct - \lambda')$; lesquels termes acquerraient, par l'intégration, un diviseur qui les rendrait du même ordre de petitesse par rapport aux autres termes, que les quantités $\frac{dp'}{dt}$, $\frac{dq'}{dt}$, $\frac{d\theta'}{dt}$, $\frac{d\psi'}{dt}$, qui ont été négligées en formant les équations (P), par rapport à celles que l'on a conservées.

Cela étant, si l'on désigne par h' l'excès de h sur $\mp b$, de sorte qu'on ait

$$h = \mp b + h',$$

les équations (L) deviendront

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\mu}\log(1 + \mu at) - \frac{2i}{\mu}\left[\frac{\mu at}{1 + \mu at} - \log(1 + \mu at)\right],\\
y &= \pm \frac{2ia}{3}\,U + \frac{2ia}{3(1-f)}\,U',\\
z &= \frac{1}{\mu}\left[(b + g')\log(1 + \mu at) - \frac{1}{2}g'(1 + \mu at)^2 + \frac{1}{2}g'\right]\\
&\quad + \frac{2ia}{3}\,V \pm \frac{2ia}{3(1-f)}\,V',
\end{aligned}\right\}\ (R)$$

où l'on a fait pour abréger

$$\log(1+\mu a t)\int\frac{\lambda_1 f\cos\lambda_1-(b-\lambda_2 f)\sin\lambda_1}{1+\mu a t}\,dt$$
$$-\int\frac{[\lambda_1 f\cos\lambda_1-(b-\lambda_2 f)\sin\lambda_1]\log(1+\mu a t)}{1+\mu a t}\,dt=\mathrm{U},$$
$$\log(1+\mu a t)\int\frac{(a_1-k)\cos\lambda_1-(b_1-h')\sin\lambda_1}{1+\mu a t}\,dt$$
$$-\int\frac{[(a_1-k)\cos\lambda_1-(b_1-h')\sin\lambda_1]\log(1+\mu a t)}{1+\mu a t}\,dt=\mathrm{U}',$$
$$\log(1+\mu a t)\int\frac{\lambda_1 f\sin\lambda_1+(b-\lambda_2 f)\cos\lambda_1}{1+\mu a t}\,dt$$
$$-\int\frac{[\lambda_1 f\sin\lambda_1+(b-\lambda_2 f)\cos\lambda_1]\log(1+\mu a t)}{1+\mu a t}\,dt=\mathrm{V},$$
$$\log(1+\mu a t)\int\frac{(a_1-k)\sin\lambda_1+(b_1-h')\cos\lambda_1}{1+\mu a t}\,dt$$
$$-\int\frac{[(a_1-k)\sin\lambda_1+(b_1-h')\cos\lambda_1]\log(1+\mu a t)}{1+\mu a t}\,dt=\mathrm{V}',$$

et où les intégrales sont supposées nulles quand $t=0$.

Ce sont donc ces formules (R) qui renferment les lois du mouvement de translation de la balle, dans le tir de la carabine. On en déduira tout-à-l'heure les conséquences principales. Auparavant il est bon de rappeler que l'on fait ici abstraction du frottement de l'air contre la superficie du projectile, dont on a examiné les effets dans le second paragraphe. Ce frottement pourrait être fort considérable, à raison des rayures de la surface produites par celles de la carabine; mais son influence sur le mouvement de translation ne serait cependant pas très grande, parce que l'axe de rotation s'écarte constamment très peu de la direction à peu près horizontale de ce mouvement (n° 16). Quoiqu'on ait supposé au mobile la forme d'un ellipsoïde, les résultats suivants conviendront néanmoins à tout corps très peu allongé ou très peu aplati, selon que la fraction ϵ sera positive ou négative, et dont les sections perpendiculaires à son axe de figure sont à fort peu près circulaires.

(32). Au bout d'un certain intervalle de temps que je désignerai par t', le mobile retombera sur le plan horizontal des x et y, passant

par son point de départ O. J'appellerai E la projection du point de chute sur l'axe Ox, et je représenterai par ϖ la distance OE, ou la longueur de la portée. D'après la première équation (R), on aura

$$\varpi = \frac{1}{\mu}\log(1+\mu at') - \frac{2\epsilon}{\mu}\left[1 - \frac{1}{1+\mu at'} - \log(1+\mu at')\right];$$

en négligeant le carré de ϵ, et désignant, à l'ordinaire, par e la base des logarithmes népériens, on en déduira

$$1 + \mu at' = e^{\mu\varpi}\left[1 + 2\epsilon\left(1 - \mu\varpi - e^{-\mu\varpi}\right)\right]; \qquad (S)$$

ce qui fera connaître le temps t' du trajet, correspondant à une portée donnée. Le coefficient de ϵ, dans cette formule, est une quantité négative; car il s'évanouit quand $\mu\varpi$ est zéro, et il diminue sans interruption lorsque $\mu\varpi$ croît indéfiniment. Il s'ensuit donc que la portée restant la même, la non-sphéricité du projectile diminue ou augmente la durée du trajet, selon que la fraction ϵ est positive ou négative, c'est-à-dire selon que ce corps est allongé ou aplati. Au degré d'approximation où nous nous sommes arrêtés, cette durée t' est d'ailleurs indépendante de la rotation du mobile.

Pour $t=t'$, on aura $z=0$; en substituant la valeur précédente de $1+\mu at'$ dans la troisième formule (R), égalée à zéro, on obtiendra donc une équation entre b et ϖ, qui servira à déterminer l'angle de tir correspondant à une portée connue, ou réciproquement, la portée qui répond à un angle b donné. En faisant aussi $t=t'$, dans la seconde formule (R), et désignant par δ la valeur de y qui en résultera, δ exprimera la déviation du projectile à l'instant de la chute, comptée sur la perpendiculaire au plan vertical des x et z, à gauche ou à droite de ce plan, suivant que sa valeur sera positive ou négative. Cette équation $z=0$ et la valeur de δ renfermeront les quatre quantités U, V, U′, V′, dépendantes à la fois de la forme et de la rotation du projectile; mais dont les deux dernières différeront essentiellement des deux autres, et devront être snpprimées, dans les résultats moyens du tir à la cible, ainsi qu'on va l'expliquer.

(33). **Les constantes $a_{\prime}$, $b_{\prime}$, k, h', renfermées dans U' et V', auront** des valeurs pour ainsi dire accidentelles, résultantes de ce qu'à l'origine du mouvement, l'axe de figure et l'axe de rotation de la balle s'écarteront plus au moins, mais toujours très peu, par hypothèse, de la ligne de tir, c'est-à-dire de la direction initiale du centre de gravité G. Dans une longue série d'épreuves, ces écarts auront lieu tantôt d'un côté et tantôt de l'autre, et les valeurs de U' et V' qui leur correspondront seront aussi tantôt positives et tantôt négatives, de telle sorte que la somme des valeurs, soit de U', soit de V', divisée par le nombre des coups, sera sensiblement égale à zéro. Cela étant, supposons que l'on place le centre de la cible au point E donné sur l'axe Ox, que son plan soit perpendiculaire à cette droite et assez étendu pour être atteint à chaque coup, et que l'on mène dans ce plan deux axes, l'un horizontal et l'autre vertical, auxquels on rapportera les coordonnées positives ou négatives des différents points où la balle viendra frapper pendant la série des épreuves. Supposons, ensuite, que cette série se compose d'un très grand nombre de coups tirés aussi exactement qu'il sera possible, dans le plan vertical de x et z, et en visant vers le point E, avec une même carabine, des balles de même forme, une même vitesse de projection a, et sous un même angle b, déterminé par l'équation $z = 0$, dans laquelle on aura fait abstraction du terme dépendant de V'. A raison de ce dernier terme de la valeur de z, et à cause de la valeur entière de y, il arrivera que les balles s'écarteront du point E, au-dessus ou au-dessous du plan des x et y, à gauche ou à droite de celui des x et z; mais la somme des ordonnées verticales des points où elles frapperont, divisée par leur nombre et en ayant égard à leurs signes, sera très probablement et à très peu près zéro; et, en même temps, la somme des abscisses horizontales, divisée par ce nombre qu'on suppose très grand, sera à très peu près constante, et égale à la partie de δ indépendante de U'. Si l'étendue de la cible n'est pas assez considérable pour qu'elle soit atteinte par toutes les balles, les déviations verticales et horizontales, qui répondront aux derniers

termes des expressions de z et de y, contribueront à diminuer, dans une longue série d'épreuves, la proportion du nombre des coups qui porteront; leur effet se confondra avec ceux des écarts de la ligne de *mire*, autour de la droite OE, qui sont dus à ce que le soldat ne vise exactement, ni suivant cette droite, ni même dans le plan vertical qui la contient; et il faudra, en conséquence, faire abstraction des quantités U' et V', soit dans le calcul de l'angle de tir au moyen de l'équation $z=0$, soit en calculant la déviation moyenne des balles dans le sens horizontal.

Il faut encore observer, relativement à ces quantités U' et V', qu'elles s'évanouissent non-seulement dans les moyennes d'un grand nombre de coups, mais aussi à chaque épreuve séparément, lorsque l'axe de rotation de la balle coïncide, à l'origine du mouvement, avec la ligne de tir, quel que soit d'ailleurs le petit angle que fait l'axe de figure avec cette ligne, provenant de ce que celui-ci ne coïncidait pas parfaitement avec l'axe de la carabine avant la sortie du projectile.

En effet, dans ce cas particulier, le demi-axe de rotation GI est d'abord compris dans le plan des x et z, et fait, avec la direction de la vitesse initiale du centre G, un angle égal à zéro ou à 180°, selon que la balle, c'est-à-dire, sa partie supérieure, tourne de gauche à droite ou de droite à gauche; on a donc, à l'origine du mouvement,

$$\mathrm{IG}z = 90^\circ \mp b, \quad \mathrm{IG}y = 90^\circ; \quad \mathrm{IG}x = 90^\circ \mp (90^\circ \mp b),$$

où les signes supérieurs correspondent au premier sens de rotation et les signes inférieurs au second; on aura, par conséquent,

$$\cos \mathrm{IG}z = \pm b, \quad \cos \mathrm{IG}y = 0, \quad \cos \mathrm{IG}x = \pm 1,$$

en négligeant le carré de b. D'après ce que α, β, etc., représentent (n° 7), on a d'ailleurs, à un instant quelconque, ces trois équations :

$$\begin{aligned}
\cos \mathrm{IG}z_{,} &= \gamma \cos \mathrm{IG}x + \gamma' \cos \mathrm{IG}y + \gamma'' \cos \mathrm{IG}z, \\
\cos \mathrm{IG}y_{,} &= \beta \cos \mathrm{IG}x + \beta' \cos \mathrm{IG}y + \beta'' \cos \mathrm{IG}z, \\
\cos \mathrm{IG}x_{,} &= \alpha \cos \mathrm{IG}x + \alpha' \cos \mathrm{IG}y + \alpha'' \cos \mathrm{IG}z.
\end{aligned}$$

Pour $t = 0$, on a en particulier

$$\varphi = 0, \quad \theta = 90^\circ + h, \quad \psi = 3.90^\circ + k, \text{ ou } 90^\circ + k;$$

et si l'on néglige les carrés et le produit de h et k, il en résulte

$$\begin{array}{lll} \gamma = \pm 1, & \gamma' = \mp k, & \gamma'' = -h, \\ 6 = \pm h, & 6' = 0, & 6'' = 1, \\ \alpha = \pm k, & \alpha' = \pm 1, & \alpha'' = 0. \end{array}$$

On a, en même temps,

$$\cos \mathrm{IG}x_{\prime} = a_{\prime}, \quad \cos \mathrm{IG}y_{\prime} = b_{\prime}, \quad \cos \mathrm{IG}z_{\prime} = 1,$$

en négligeant les carrés de $a_{\prime}$ et $b_{\prime}$. Or, en négligeant de même les produits bh et bk, et observant que tous les signes supérieurs se correspondent, ainsi que les signes inférieurs, ces diverses valeurs rendent identique la première des trois équations citées, et réduisent les deux autres à

$$b_{\prime} = h \pm b, \quad a_{\prime} = k;$$

donc à cause de $h = \mp b + h'$, les quantités U' et V' seront zéro, ce qu'il s'agissait de prouver.

La valeur de δ, réduite à son premier terme, sera, par conséquent,

$$\delta = \pm \tfrac{2\iota a}{3} \mathrm{U};$$

et à raison du double signe, le sens de cette déviation changera avec celui de la rotation du projectile. Au contraire, en supprimant le dernier terme de l'expression de z, l'équation $z = 0$ ne contiendra plus aucun terme ambigu, et l'angle de tir que l'on en déduira sera indépendant du sens de la rotation. Mais cet angle b dépendra de la grandeur et du signe de ι; en sorte que s'il a été déterminé par le calcul ou par l'expérience, pour des balles aplaties, il ne pourra pas servir, avec la même vitesse de projection a et à la même distance OE, pour des balles allongées, *et vice versâ*.

Cette remarque importante pour la pratique se trouve confirmée par des épreuves relatives au tir de la carabine, faites sous la direction de M. le lieutenant-colonel de Poncharra, et dont il a bien voulu me communiquer les résultats. La cible qu'il s'agissait d'atteindre, étant située à une distance de l'arme égale à 250 mètres, on a conclu de la moyenne d'un grand nombre d'épreuves effectuées avec des balles aplaties, 62'30" pour l'angle de tir; en tirant ensuite à la même distance et sous le même angle, on a atteint la cible 87 fois sur 100 avec de pareilles balles, et seulement 49 fois sur 100 avec des balles allongées; différence que l'on doit attribuer à l'influence de la forme du projectile sur l'angle de tir, relatif à une longueur donnée de la portée. L'avantage aurait été, au contraire, pour les balles allongées, si l'on eût tiré, à la même distance, sous un angle différent, préalablement déterminé par l'expérience pour des balles de cette forme. Dans ces épreuves, la vitesse du projectile s'élevait à 384 mètres par seconde; la cible était un rectangle de deux mètres et deux tiers de mètre de côtés; les axes des balles aplaties avaient $0^m,01467$ et $0^m,01692$ de longueur, et ceux des balles allongées $0^m,01692$ et $0^m,01918$. Les hélices de la carabine, au nombre de six, faisaient un tour entier sur une longueur de $6^m,226$, et par conséquent (n° 29), les balles tournaient sur elles-mêmes avec une vitesse de 61 ou 62 tours par seconde.

(34). Les intégrales que renferment les expressions de U et V contenant, sous le signe $\int$, d'autres intégrales λ_1 et λ_2 qui ne peuvent pas s'obtenir sous forme finie, il s'ensuit que le calcul des valeurs numériques de la déviation δ et de l'angle b se rapporterait aux quadratures doubles, ce qui le rendrait très pénible. Mais par le procédé de l'intégration par partie, on peut, comme on va le voir, réduire λ_1 et λ_2 en séries ordonnées suivant les puissances croissantes du rapport $\frac{\epsilon l}{4a_1}$. Or, malgré la petitesse de ϵ, il arrivera souvent, et je supposerai en effet, que ce rapport soit une assez petite fraction pour rendre ces séries très convergentes, du moins dans leurs premiers termes. C'est ce qui aura lieu effectivement dans l'application numé-

rique que nous ferons plus bas à l'exemple que l'on vient de citer, où ce rapport, sera à peu près un 25e.

Ainsi, en ayant égard à l'expression de l'angle $\lambda_{,}$ compris dans les intégrales λ_1 et λ_2 (n° 29), et en faisant

$$\frac{cl}{4a_1} = \rho,$$

nous aurons

$$\mu a dt = \rho (1 + \mu a t)^2 d\lambda_{,};$$

et à cause de (n° 26)

$$\zeta = b + g' - g' (1 + \mu a t)^2,$$

il en résultera

$$\lambda_1 = \frac{\rho c}{\mu a} [(b + g') \sin \lambda_{,} - g' \int (1 + \mu a t)^2 \cos \lambda_{,} d\lambda_{,}],$$
$$\lambda_2 = \frac{\rho c}{\mu a} [(b + g') (1 - \cos \lambda_{,}) - g' \int (1 + \mu a t)^2 \sin \lambda_{,} d\lambda_{,}];$$

les intégrales étant prises depuis $\lambda_{,} = 0$ qui répond à $t = 0$. En intégrant par partie autant de fois qu'on voudra, et remettant toujours sous les signes $\int$, la valeur précédente de dt, il est évident que chaque nouvelle intégrale acquerra le facteur ρ, et que λ_1 et λ_2 se trouveront réduites en séries ordonnées suivant les puissances de cette fraction. On aura, de cette manière,

$$\begin{aligned}\int (1 + \mu a t)^2 \cos \lambda_{,} d\lambda_{,} = {} & [1 - 1.2.3.\rho^2 (1 + \mu a t)^2 \\ & + 1.2.3.4.5.\rho^4 (1 + \mu a t)^4 - \text{etc.}] (1 + \mu a t)^2 \sin \lambda_{,} \\ & - [1.2 - 1.2.3.4.\rho^2 (1 + \mu a t)^2 \\ & + 1.2.3.4.5.6.\rho^4 (1 + \mu a t)^4 - \text{etc}] \rho (1 + \mu a t)^3 (1 - \cos \lambda_{,}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int (1 + \mu a t)^2 \sin \lambda_{,} d\lambda_{,} = {} & [1 - 1.2.3.\rho^2 (1 + \mu a t)^2 \\ & + 1.2.3.4.5.\rho^4 (1 + \mu a t)^4 - \text{etc.}] (1 + \mu a t)^2 (1 - \cos \lambda_{,}) \\ & + [1.2 - 1.2.3.4.\rho^2 (1 + \mu a t)^2 \\ & + 1.2.3.4.5.6.\rho^4 (1 + \mu a t)^4 - \text{etc.}] \rho (1 + \mu a t)^3 \sin \lambda_{,}.\end{aligned}$$

Je substitue ces valeurs dans celles de $f\lambda_1$ et $f\lambda_2$, et celles-ci, dans les expressions de U et V; je fais en outre $t = t'$ dans ces expressions, et j'étends, en conséquence, les intégrales qu'elles renferment, depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t'$. D'après les valeurs de ρ et de f, on a

$$\frac{\rho c f}{\mu a} = 1;$$

au moyen de quoi, il vient

$$U = g' \int_0^{t'} \log\left(\frac{1 + \mu a t}{1 + \mu a t'}\right) \frac{P dt}{1 + \mu a t},$$
$$V = g' \int_0^{t'} \log\left(\frac{1 + \mu a t}{1 + \mu a t'}\right) \frac{Q dt}{1 + \mu a t} - b \int_0^{t'} \log\left(\frac{1 + \mu a t}{1 + \mu a t'}\right) \frac{dt}{1 + \mu a t};$$

P et Q représentant des séries ordonnées suivant les puissances de ρ, savoir :

$$P = [(1 + \mu a t)^2 - 1] \sin \lambda_{,} + 2\rho(1 + \mu a t)^3 (1 - \cos \lambda_{,}) + \text{etc.},$$
$$Q = [(1 + \mu a t)^2 - 1](1 - \cos \lambda_{,}) - 2\rho(1 + \mu a t)^3 \sin \lambda_{,} + \text{etc.}$$

Les intégrales des parties indépendantes de $\sin \lambda_{,}$ et $\cos \lambda_{,}$ s'obtiendront sous forme finie; on aura, par les règles ordinaires,

$$\int_0^{t'} \log\left(\frac{1 + \mu a t}{1 + \mu a t'}\right) \frac{dt}{1 + \mu a t} = -\frac{1}{2\mu a} \log^2 (1 + \mu a t'),$$
$$\int_0^{t'} \log\left(\frac{1 + \mu a t}{1 + \mu a t'}\right) (1 + \mu a t)\, dt = \frac{1}{2\mu a} \log (1 + \mu a t')$$
$$- \frac{1}{4\mu a} [(1 + \mu a t')^2 - 1],$$
$$\int_0^{t'} \log\left(\frac{1 + \mu a t}{1 + \mu a t'}\right) (1 + \mu a t)^2\, dt = \frac{1}{3\mu a} \log (1 + \mu a t')$$
$$- \frac{1}{9\mu a} [(1 + \mu a t')^3 - 1],$$

etc.

Les intégrales des parties dépendantes de $\sin \lambda_{,}$ et $\cos \lambda_{,}$ se réduiront,

comme celles qui entraient dans les expressions de λ_1 et λ_2, en séries ordonnées, suivant les puissances de ρ; mais si l'on s'arrête dans les valeurs de U et V, aux termes dépendants de la première puissance de ρ inclusivement, ces intégrales des parties périodiques disparaîtront, et, à ce degré d'approximation, l'on trouvera simplement

$$U = \frac{2g'\rho}{3\mu a}\left[\log(1 + \mu a t') - \frac{1}{3}(1 + \mu a t')^3 + \frac{1}{3}\right],$$

$$V = \frac{b + g'}{2\mu a}\log^2(1 + \mu a t') + \frac{g'}{2\mu a}\left[\log(1 + \mu a t') - \frac{1}{2}(1 + \mu a t')^2 + \frac{1}{2}\right].$$

Cela posé, je fais

$$1 + \mu a t' = \omega,$$

de sorte que ω soit la valeur numérique de la formule (S). Je mets ensuite la valeur de V dans la troisième formule (R), égalée à zéro, où l'on fait $t = t'$, et où l'on supprimera le terme dépendant de V'. Il en résulte

$$b\log\omega + g'\left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon\right)\left(\log\omega - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\varepsilon\,(b + g')\log^2\omega, \quad \text{(T)}$$

pour l'équation qui servira à calculer l'angle de tir b, correspondant à une longueur donnée ϖ de la portée, comprise dans la formule (S).

D'après les valeurs de ρ et de U, l'expression de δ du numéro précédent donnera, en même temps,

$$\delta = \pm\frac{clg'}{9\mu a}\left(\log\omega - \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{3}\right), \quad \text{(U)}$$

pour la déviation horizontale du centre de la balle, au point où elle atteint la cible.

(35). Quand la valeur numérique de δ aura été calculée, il faudra, pour augmenter la justesse du tir et atteindre plus sûrement le point E de la cible, viser vers un autre point E' de la ligne horizontale passant par E; à droite de E quand la valeur de δ sera positive, à gauche lorsqu'elle sera négative, et de manière qu'on ait $EE' = \delta$, abstraction faite du signe.

Si l'on veut déterminer cette distance EE', par l'observation et sans

rien emprunter du calcul, on tirera d'abord un grand nombre de coups, en visant aussi bien qu'il sera possible vers le point E, à la même distance OE, avec une même vitesse initiale, une même carabine, et des balles qui seront toutes semblables et de même poids, mais en faisant varier l'angle de tir. Le plan de la cible devra être assez grand pour qu'elle soit atteinte à chaque coup. On y mènera par le point E deux axes, l'un horizontal et l'autre vertical, auxquels on rapportera, comme dans le n° 33, les coordonnées des points où le centre de la balle viendra toucher. On prolongera cette série d'épreuves jusqu'à ce que l'on ait obtenu un angle de tir pour lequel, dans un très grand nombre de coups, la somme des ordonnées verticales, divisée par ce nombre et en ayant égard à leurs signes, soit une ligne très petite, relativement à la grandeur des ordonnées moyennes. Ce sera l'angle de tir qui répond à la distance OE et à la vitesse de projection données; il dépendra, comme on l'a dit plus haut, de la forme des balles, et devra coïncider avec l'angle b déduit des équations (S) et (T), ou en différer très peu. En tirant ensuite un autre grand nombre de coups, sous cet angle, à la même distance, avec la même arme, la même vitesse initiale et des balles pareilles aux premières, la somme des abscisses horizontales, divisée par leur nombre et en tenant compte de leurs signes, exprimera la déviation horizontale, positive ou négative, qui devra coïncider exactement, ou à très peu près, avec la valeur de δ déterminée par l'équation (U) : en la prenant avec un signe contraire, on aura la distance EE'. Si la cible n'avait pas une grande étendue, cette déviation influerait sur le nombre de fois qu'elle serait atteinte dans un très grand nombre d'épreuves; mais si l'on connaissait seulement le rapport du premier de ces nombres au second, cette donnée ne suffirait pas pour qu'on en pût conclure la grandeur et le sens de la déviation.

(36). Pour donner une application numérique des équations (S), (T), (U), je choisis l'exemple du n° 33, dans lequel on avait 250 mètres pour la portée, 384 mètres par seconde pour la vitesse initiale,

$0^m,01635$ pour le diamètre moyen des balles aplaties, et $0^m,00225$ pour la différence de leurs axes; ce qui donne, d'après le n° 26, $-0,09174$ pour la valeur de ε qui s'y rapporte. On avait aussi $6^m,226$ pour la ligne désignée par i, et, par conséquent, $380,80$ pour le rapport $\frac{i}{2l}$ de cette longueur à celle du diamètre moyen. Le plus généralement, on prend $\frac{2}{5}$ pour la fraction n qui entre dans le coefficient de la résistance (n° 25); je prendrai aussi 8250 pour le rapport $\frac{D'}{D}$ de la densité du plomb à celle de l'air, dans l'état le plus ordinaire; il en résultera

$$\mu = \frac{0,00005455}{2l};$$

et si l'on fait, dans notre exemple,

$$\varpi = 250^m, \qquad 2l = 0^m,01635,$$

on en déduira

$$\mu\varpi = 0,83409;$$

au moyen de quoi l'équation (S) deviendra

$$1 + \mu a t' = 2,3027 - (1,2359)\varepsilon.$$

En prenant la seconde pour unité, on aura

$$a = 384^m, \qquad \mu a = 1,28116;$$

et à cause de

$$\varepsilon = -0,09174;$$

on déduira de l'équation précédente

$$t' = 1,1053,$$

c'est-à-dire, à très peu près une seconde et un dixième; résultat que je ne peux pas vérifier, parce que la durée du trajet n'a pas été observée. Toutes choses d'ailleurs égales, si l'on changeait le signe de ε, cette durée serait réduite à un peu moins d'une seconde; ce qui tient à ce que l'air oppose moins de résistance au mouvement de la balle allongée qu'à celui de la balle aplatie.

On trouvera aussi

$$c = \frac{2\pi a}{i} = 387{,}53\,, \quad \rho = \frac{cl}{4\alpha i} = -\,0{,}02248\,;$$

en sorte que ρ est effectivement une petite fraction, comme le supposent les équations (T) et (U).

La valeur de ω relative à la balle aplatie, qu'il faudra employer dans ces deux équations, sera

$$\omega = 2{,}41608.$$

En ayant égard à la diminution de poids qu'une balle de plomb éprouve dans l'air à l'état ordinaire, et la seconde étant l'unité de temps, comme dans les valeurs précédentes de a et μa, je prends

$$g = 9^{m}{,}80750,$$

pour la mesure de la gravité; il en résulte (n° 26)

$$g' = \frac{g}{2\mu a.a} = 0{,}009968.$$

Maintenant, au moyen de ces diverses valeurs, l'équation (T) donne

$$b = 0{,}017573 = 60'25''\ (*);$$

ce qui s'accorde aussi bien qu'on pouvait l'espérer avec l'observation qui a donné $62'30''$ pour cet angle b.

La différence d'à peu près $2'$ qui existe sur cette valeur, entre le calcul et l'expérience, peut être attribuée, soit aux erreurs de l'observation, soit au degré d'approximation où nous nous sommes arrêtés, relativement à la fraction ϵ, égale à un 11ᵉ dans notre exemple, et dont nous avons négligé le carré. Toutes les autres données restant les mêmes, si l'on changeait seulement le signe de ϵ, on trouverait $48'10''$, pour la valeur de b; de manière que cet angle, relatif à la balle allongée, serait moindre que celui qui se rapporte à la balle aplatie; ce

(*) Par une erreur que l'on avait faite dans un premier calcul, on a mis $59'24''$ pour cet angle, dans le préambule de ce Mémoire.

qui tient à la même cause que la différence entre les temps du trajet des deux balles.

De la formule (U), on déduit, en même temps,

$$\delta = \mp 0{,}00201.$$

La moyenne des déviations horizontales dans la série d'épreuves que nous avons prise pour exemple, était donc d'à peu près deux millimètres, à la droite ou à la gauche du soldat, selon que la partie supérieure de la balle tournait de gauche à droite ou de droite à gauche; mais comme la cible avait deux tiers de mètres de largeur, cette déviation n'a pas dû influer sur la proportion du nombre de coups qui ont porté; et vu sa petitesse, il aurait été impossible de la déduire des écarts de la balle, si on les eût mesurés à toutes les épreuves, ainsi qu'on l'a expliqué plus haut.

(36). La supposition du n° 29, relative à la grandeur de la vitesse c, et d'après laquelle nous avons formé les intégrales des équations (N) et (O), n'a plus lieu dans le cas où les rayures de la carabine sont parallèles; ce qui rend nulle la vitesse de rotation de la balle à l'origine du mouvement, et conséquemment aussi, chacune de ses trois composantes. On a donc alors $c = 0$; au moyen de quoi ces équations se réduisent à

$$\frac{d\Psi}{dt} = -q, \quad \frac{d\Theta}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = \lambda(\Theta \pm \zeta), \quad \frac{dq}{dt} = -\lambda\Psi;$$

et pour déterminer les quatre constantes arbitraires que renfermeront leurs intégrales, on aura

$$p = 0, \quad q = 0, \quad \Theta = h, \quad \Psi = k,$$

pour $t = 0$. Le mobile n'ayant pas de rotation quand son mouvement commence, on pourra prendre pour la droite GL à cette époque, celle que l'on voudra des deux parties de la droite suivant laquelle le plan des $x_{,}$ et $y_{,}$ coupe le plan des x et y; pour fixer les idées, je prendrai la partie située à gauche du plan des x et z, ou qui fait avec l'axe des x un angle très peu différent de 270°; et le demi-axe

de figure $Gz_{,}$ sera alors celui qui est compris dans la partie antérieure du projectile (n° 28). L'angle donné h sera positif ou négatif selon que $Gz_{,}$, dont il exprime l'inclinaison sur le plan de x et y, tombera au-dessous ou au-dessus de ce plan horizontal; l'angle k, aussi donné, sera celui que fait le plan vertical de ce demi-axe avec le plan des x et z, où est comprise la direction initiale du centre G : il aura une valeur positive ou négative, selon que le premier plan sera situé à droite ou à gauche du second. Pour que $Gz_{,}$ coïncide avec la direction de G, il faudra qu'on ait $k=0$ et $h=-b$, en désignant toujours par b l'angle de tir compris entre cette direction et l'axe des x. Enfin, ce sera le signe supérieur que l'on devra prendre devant ζ, dans la troisième des quatre équations différentielles.

Cela étant, si l'on élimine p et q entre ces quatre équations, que l'on mette pour λ sa valeur, et qu'on ait égard à celle de ζ (n° 26), on aura

$$\frac{d^2(\Theta+\zeta)}{dt^2} - \frac{4\varepsilon\mu a^2}{l(1+\mu at)^2}(\Theta+\zeta) + 2\mu^2a^2g' = 0,$$

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} - \frac{4\varepsilon\mu a^2}{l(1+\mu at)^2}\Psi = 0.$$

En intégrant par la méthode ordinaire, il vient

$$\Theta+\zeta = \mathrm{A}\,(1+\mu at)^{\frac{1}{2}+m} + \mathrm{B}\,(1+\mu at)^{\frac{1}{2}-m} + \frac{2g'}{m^2-\frac{9}{4}}(1+\mu at)^2,$$

$$\Psi = \mathrm{A}'(1+\mu at)^{\frac{1}{2}+m} + \mathrm{B}'(1+\mu at)^{\frac{1}{2}-m},$$

où l'on désigne par A, B, A', B', les constantes arbitraires, et où l'on fait, pour abréger,

$$m = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4\varepsilon}{\mu l}};$$

quantité que l'on supposera positive, pour fixer les idées.

A moins que la fraction ε ne soit extrêmement petite, m sera un nombre assez considérable pour que la puissance m de $1+\mu at$ devienne une très grande quantité pendant la durée du mouvement: dans l'exemple du numéro précédent, on aurait à peu près $m=15$, lors même que cette fraction ne serait que le 10e de ce qu'elle était, et $(1+\mu at)$ surpasserait un million, par exemple, bien avant qu'on

eût $t = t'$. Pour que les angles Θ et Ψ demeurent constamment très petits, et les vitesses p et q aussi très petites, comme le supposent les équations (N) et (O), il faudra donc que cette puissance disparaisse des formules précédentes; ce qui exigera que l'on ait $A = 0$ et $A' = 0$. Comme on a

$$\frac{d\Theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = -2g'\mu a, \quad \frac{d\Psi}{dt} = 0,$$

pour $t = 0$, il en résultera $B = \frac{2g'}{m}$ et $B' = 0$, en négligeant le dernier terme de la première formule, et remplaçant par $-m$ l'exposant $\frac{1}{2} - m$. A un instant quelconque, on aura, de cette manière,

$$\Theta = \frac{2g'}{m}(1 + \mu at)^{-m} - \zeta, \quad \Psi = 0;$$

et à l'origine du mouvement, on aura, en particulier,

$$h = \frac{2g'}{m} - b, \quad k = 0;$$

en sorte que ce n'est pas dans le cas où l'axe de figure du mobile coïncidait exactement, à cette époque, avec la direction du centre G, et où l'on avait $h = -b$ et $k = 0$, que cet axe demeurerait à peu près parallèle à lui-même pendant tout le trajet du projectile. En vertu de l'équation $\Psi = 0$, cet axe ne sortira pas du plan des x et z; et d'après la valeur de Θ, qui approchera de plus en plus d'être égale à $-\zeta$, il approchera de même de coïncider avec la tangente à la trajectoire, dont il ne s'écartera pas sensiblement dans la plus grande partie de ce trajet.

Pendant toute sa durée, on aura

$$p = -2g'\mu a(1 + \mu at)^{-m-1} - \frac{d\zeta}{dt}, \quad q = 0, \quad r = 0,$$

pour les trois composantes de la vitesse de rotation, qui aura lieu, par conséquent, autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical des x et z, et qui s'approchera très rapidement d'être égale à $-\frac{d\zeta}{dt}$, c'est-à-dire à une quantité indépendante de t, pourvu que cette frac-

tion soit, comme on vient de le supposer, assez grande pour rendre m un nombre considérable. D'après la valeur de ζ, on aura

$$p = 2g'\mu a\ (1 + \mu at'),$$

pour $t = t'$. Dans l'exemple du numéro précédent, cette vitesse finale serait d'à peu près un tour entier en 102 secondes.

En vertu des valeurs de Θ et Ψ, celles de T, T′, T″, du n° 31, qu'on devra employer dans les équations (L), seront

$$T = 6, \quad T' = 0, \quad T'' = -\frac{4g'}{m}(1 + \mu at)^{-m} + 2\zeta,$$

en prenant le signe supérieur dans la valeur de T″, qui avait le signe ambigu $\mp$. L'expression de x restera la même que dans ce numéro; on aura $y = 0$, de sorte que le centre G ne sortira pas du plan des x et z, non plus que l'axe $Gz_{\prime}$; ce qui devait être, en effet, puisque tout est semblable de part et d'autre de ce plan vertical. Les intégrations indiquées dans la valeur de z, s'effectueront sans difficulté; et dans cette valeur, en fonction de t et sous forme finie qui en résultera, on supprimera les termes qui auront m^2 pour diviseur.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce cas particulier qui ne saurait se rencontrer dans la pratique. Dans le tir de la carabine à rayures parallèles, pour peu que les angles h et k s'écartent des valeurs précédentes $\frac{2g'}{m} - b$ et zéro, ce qui ne manquera pas d'arriver, on ne pourra plus supposer, comme dans le n° 27, que la balle tourne constamment autour d'une droite, qui s'écarte très peu d'un axe principal et soit toujours à très peu près parallèle à elle-même. Pour déterminer alors le mouvement de rotation et son influence sur celui de translation, il serait nécessaire de recourir à des approximations très compliquées que j'abandonne à ceux qui voudront s'en occuper.

La longueur de ce Mémoire m'oblige d'en renvoyer la suite à un autre, dans lequel il me restera à considérer l'influence de la non-homogénéité des projectiles sur leur double mouvement de rotation et de translation.

SUITE

DU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Les causes principales auxquelles on a attribué les déviations observées dans le tir des projectiles de l'artillerie, sont, comme on l'a expliqué dans le préambule du Mémoire précédent, le frottement du mobile contre l'air, sa non-sphéricité parfaite, sa non-homogénéité. On a examiné, dans le deuxième et le troisième paragraphe, les effets du frottement et de la figure, et l'on a renvoyé à un quatrième paragraphe, dont cette suite sera composée, l'examen des effets qui peuvent être dus au défaut d'homogénéité. Nous supposerons alors que le projectile soit une sphère dont le centre de gravité s'écarte un peu de son centre de figure, à raison de la non-homogénéité de sa masse. Dans ce cas, les équations différentielles du double mouvement de translation et de rotation ont une forme plus simple que quand il s'agit d'un corps homogène dont la figure n'est pas exactement sphérique. Cependant, leur application au tir de la carabine rayée en hélice présente de plus grandes difficultés. En effet, dans le cas de la balle allongée ou aplatie, on peut supposer que la rotation produite par les hélices de l'arme, a lieu autour de l'axe de figure de la balle, ce qui facilite beaucoup l'intégration, par approximation, des équations différentielles du double mouvement; au contraire, pour une balle sphérique non homogène, la rotation initiale peut avoir lieu autour d'un axe très différent de la droite qui contient les centres de gravité et de figure du projectile: l'axe de rotation n'étant donc

point, en général, un des axes principaux de la balle, il se déplacera continuellement dans l'intérieur du mobile, c'est-à-dire qu'il coïncidera successivement avec des diamètres qui s'écarteront beaucoup de sa direction initiale, et cette circonstance rendra bien plus difficile la détermination approchée du mouvement. D'après les différents cas de ce mouvement, que l'on peut traiter sans recourir à des calculs trop compliqués, on reconnaît que l'influence de la petite distance des deux centres de la balle sphérique, non homogène, est beaucoup moindre, sur son mouvement de translation et sur la justesse du tir de la carabine, que ne peut l'être, toutes choses d'ailleurs égales, celle de la non-sphéricité d'une balle un peu aplatie ou allongée.

On a aussi appliqué, dans ce second Mémoire, les équations du mouvement des projectiles dans l'air, au tir de la bombe sphérique, mais dont les centres de figure et de gravité s'écartent un peu l'un de l'autre, à raison de sa non-homogénéité. La conséquence générale à laquelle on parvient, est que cette petite excentricité n'a qu'une influence négligeable sur le mouvement de translation du projectile, et conséquemment sur la justesse du tir de la bombe. Pour que cette influence devînt sensible, il faudrait que la bombe eût reçu à l'origine du mouvement une vitesse de rotation extrêmement grande, ce qui n'a pas lieu dans la pratique. La distance des deux centres de la bombe non homogène influe beaucoup, au contraire, sur son mouvement de rotation. Mais, à cet égard, ce serait une erreur de croire que, dans ce mouvement, la droite qui joint ces deux points tende à devenir verticale, et le centre de gravité, à descendre au-dessous du centre de figure : on ne doit pas perdre de vue, en effet, que c'est autour du premier de ces deux centres que la bombe tourne, comme si ce point était fixe et en vertu des forces qui la sollicitent; or, le poids d'un corps ne saurait influer sur le mouvement autour de son centre de gravité; et ce mouvement ne peut être modifié pendant la durée du trajet du projectile que par la résistance de l'air. Si la rotation initiale était nulle, la droite qui joint les deux centres demeurerait, dans le vide, parallèle à elle-même pendant toute cette

durée; dans l'air, la résistance du fluide changerait la direction de cette droite, et tendrait à la ramener, non pas à la direction verticale, mais à celle du mouvement de translation. Dans le cas d'une vitesse initiale de rotation, la droite dont il s'agit pourra faire des révolutions entières autour du centre de gravité, ou de simples oscillations de part et d'autre de la tangente à la trajectoire de ce point; mais ce sera toujours aux instants où elle coïncidera avec cette tangente, que sa vitesse de rotation atteindra son *maximum*, de même que cela a lieu dans le mouvement du pendule simple, lorsque sa direction vient à passer par la verticale.

---

§ IV. *Influence de la non-homogénéité du projectile sur son double mouvement de rotation et de translation.*

(38). Dans le paragraphe précédent, nous avons appliqué les équations générales de ce double mouvement, dans un fluide résistant, au cas où le projectile s'écarte très peu de l'homogénéité et de la forme sphérique. En désignant alors par ρ le rayon vecteur GM d'un point quelconque M de sa surface, on a

$$\rho = l(1 + \varepsilon u);$$

l étant le rayon de la sphère, équivalente en volume à celui du mobile, ε une très petite fraction, et u une fonction des angles qui déterminent la direction de GM par rapport aux trois axes principaux $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, de ce corps, qui se coupent à son centre de gravité G. Si l'on fait, comme dans le n° 21,

$$\cos MGx_{,} = \lambda', \quad \cos MGy_{,} = \mu', \quad \cos MGz_{,} = \nu',$$

de sorte qu'on ait

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = 1,$$

les coordonnées $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, du point M, relatives à ces axes, auront pour valeurs

$$x_{,} = \rho\lambda', \quad y_{,} = \rho\mu', \quad z_{,} = \rho\nu',$$

et la quantité ρ pourra être regardée comme une fonction de λ', μ', ν', donnée par l'équation de la surface du projectile.

Nous avons aussi, dans ce même paragraphe, fait abstraction du frottement du mobile contre l'air, dont les effets avaient été déterminés précédemment; et les équations générales des mouvements simultanés de rotation et de translation, se sont réduites, en conséquence, aux équations (A) du n° cité. Mais pour effectuer les intégrations indiquées par $\int$, dans leurs seconds membres, il est nécessaire de faire une hypothèse particulière sur la fonction u, ou sur la forme du projectile: afin de connaître l'influence de la non-sphéricité sur son double mouvement, on a supposé dans le n° 23, que ce corps était un ellipsoïde homogène; maintenant, pour déterminer l'influence de sa non-homogénéité, nous supposerons qu'il soit une sphère hétérogène dont le centre de gravité s'écarte très peu de son centre de figure. En désignant par F le second de ces deux points, la droite GF pourrait s'écarter des trois axes principaux, et faire des angles donnés avec ces droites; mais afin de simplifier les calculs, je supposerai que GF coïncide avec l'une de ces droites, par exemple avec le demi-axe $Gz_{,}$ ou avec son prolongement. La longueur de GF devant d'ailleurs être une très petite fraction du rayon l, on prendra pour le rapport de GF à ce rayon, la fraction ϵ, qui sera regardée comme une quantité positive ou négative, selon que le point F tombera sur $Gz_{,}$ ou sur son prolongement. De cette manière, nous aurons

$$(z_{,} - \epsilon l)^2 + y_{,}^2 + x_{,}^2 = l^2,$$

pour l'équation de la surface du projectile.

En y substituant les valeurs précédentes de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$; la résolvant ensuite par rapport à ρ; et négligeant le carré de ϵ, on en déduit

$$\rho = l(1 + \epsilon\nu');$$

en sorte que, dans le cas que nous considérons, on aura simplement

$$u = \nu', \quad \frac{du}{d\nu'} = 1, \quad \frac{du}{d\mu'} = 0, \quad \frac{du}{d\lambda'} = 0.$$

La formule (E) du n° 21 donnera, par conséquent,

$$V = (1 + \epsilon\nu')\frac{ds}{dt}\cos\zeta - \epsilon z' + \epsilon(q\lambda' - p\mu'),$$

pour la vitesse du point M normale à la surface, ou dirigée suivant le prolongement du rayon GM. Elle ne dépendra pas de la vitesse de rotation r autour de l'axe principal qui contient le point F; mais elle dépendra des vitesses p et q autour des deux autres axes $Gx_,$ et $Gy_,$, ainsi que de la vitesse $\frac{ds}{dt}$ du point G, et de sa composante z' suivant $Gz_,$ (n° 7).

Les équations (C) et (D) du n° 21, se réduiront à

$$\begin{aligned}
z_,\cos\mu_, - y_,\cos\nu_, &= \epsilon l u', \\
x_,\cos\nu_, - z_,\cos\lambda_, &= -\epsilon l\lambda', \\
y_,\cos\lambda_, - x_,\cos\mu_, &= 0, \\
\cos\lambda &= \lambda''(1 + \epsilon\nu') - \epsilon\gamma, \\
\cos\mu &= \mu''(1 + \epsilon\nu') - \epsilon\gamma', \\
\cos\nu &= \nu''(1 + \epsilon\nu') - \epsilon\gamma''.
\end{aligned}$$

Quant aux valeurs des six quantités λ', μ', ν', λ'', μ'', ν'', elles seront toujours exprimées par les formules (F) et (G) du même n° 21. Enfin, nous aurons

$$d\sigma = l^2(1 + 2\epsilon\nu')\sin\zeta d\zeta d\eta,$$

pour la valeur de $d\sigma$ du n° 22.

Au moyen de ces diverses valeurs, on formera les expressions des quantités comprises sous les signes $\int_,$ dans les équations (A). Ces intégrales, relatives aux angles ζ et η, devant s'étendre à tous les

points de l'hémisphère antérieur du projectile, on les prendra depuis $\zeta = 0$ et $\nu = 0$, jusqu'à $\zeta = \frac{1}{2}\pi$ et $\nu = 2\pi$, en désignant à l'ordinaire, par π le rapport de la circonférence au diamètre; et les intégrations s'effectueront immédiatement.

(39). Considérons en premier lieu les trois dernières équations (A). En représentant par D' la densité moyenne du projectile, sa masse m sera

$$m = \frac{4\pi}{3} D' l^3.$$

Si l'on suppose, pour plus de simplicité, sa constitution symétrique autour de l'axe $Gz_{,}$, ses moments d'inertie par rapport aux deux autres axes $Gx_{,}$ et $Gy_{,}$ seront égaux, et l'on aura, pour ses trois moments d'inertie principaux,

$$B = A = \frac{2m}{5}(1 + \epsilon k_{,}), \quad C = \frac{2m}{5}(1 + \epsilon k'),$$

en désignant par $k_{,}$ et k' des constantes données dont les valeurs dépendront de cette constitution, et dont nous représenterons par k la différence $k' - k_{,}$ positive ou négative.

A cause de

$$\int_{,}(y_{,} \cos \lambda_{,} - x_{,} \sin \mu_{,}) d\sigma = 0,$$

la dernière des équations (A) se réduira à $dr = 0$; en représentant par c une constante donnée, on aura donc $r = c$; par conséquent, la rotation autour de l'axe $Gz_{,}$ sera uniforme pendant toute la durée du mouvement; mais cet axe, fixe dans l'intérieur du mobile, pourra changer continuellement de direction dans l'espace. A raison de $A = B$, tous les rayons du mobile, perpendiculaires à $Gz_{,}$, seront des axes principaux : pour fixer les idées, on prendra pour $Gx_{,}$ le rayon qui coïncidait à l'origine du mouvement, avec la droite GL dirigée à cette époque, vers le nœud ascendant L du plan perpendiculaire à $Gz_{,}$, sur le plan horizontal; ce qui rendra la constante c positive (n° 2),

puisque la rotation autour de $Gz_{,}$ aura lieu alors de $Gx_{,}$ ou GL, vers $Gy_{,}$ qui se trouvera au-dessus de ce second plan; et quand le premier sera aussi horizontal, et conséquemment la droite GL indéterminée, on pourra toujours prendre cette droite et les deux demi-axes $Gx_{,}$ et $Gy_{,}$ (n° 14), de manière que la vitesse c soit encore positive. Pour $t=0$, on aura $\varphi=0$. Excepté le cas où la rotation initiale aura lieu autour de GL même, l'angle ψ ou xGL sera donné sans ambiguité; l'angle dièdre, aigu ou obtus, formé par les deux angles plans $y_{,}$GL et xGL, sera aussi donné; ce qui fera connaître la partie de l'axe de figure du mobile qu'il faudra prendre pour $Gz_{,}$, c'est-à-dire, si cette partie est ou n'est pas celle qui contient le point F. Dans le cas d'exception, le nœud ascendant L ne sera plus déterminé; on pourra prendre indifféremment pour GL, l'une ou l'autre des deux parties de l'intersection du plan de $Gx_{,}$ et $Gy_{,}$, avec le plan horizontal; ce qui donnera lieu à deux valeurs initiales de l'angle L$Gx_{,}$ différentes de 180° l'une de l'autre: pour fixer les idées, nous prendrons pour GL la partie de l'intersection des deux plans, qui fait un angle aigu avec la droite $Gx_{,}$. Ces détails étaient nécessaires pour faire disparaître toute ambiguité dans les données initiales du problème.

La quatrième et la cinquième équation (A) deviendront

$$\frac{dp}{dt}+\epsilon kcq=\frac{2}{\pi}\epsilon\lambda^2\frac{ds^2}{dt^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\mu'\cos^2\zeta\sin\zeta d\zeta d\eta,$$

$$\frac{dq}{dt}-\epsilon kcp=-\frac{2}{\pi}\epsilon\lambda^2\frac{ds^2}{dt^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\lambda'\cos^2\zeta\sin\zeta d\zeta d\eta,$$

en continuant de négliger le carré de ϵ, et faisant pour abréger

$$\frac{15nD}{16D'l^2}=\lambda^2,$$

de sorte que $\frac{1}{\lambda}$ représente actuellement une ligne d'une longueur donnée. D'après les formules (F) et (G) du n° 21, on aura d'ailleurs

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} \lambda' \cos^2\zeta \sin\zeta d\zeta d\eta = \tfrac{1}{2}\pi\,(h\alpha + h_1\alpha' + h_2\alpha''),$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} \mu' \cos^2\zeta \sin\zeta d\zeta d\eta = \tfrac{1}{2}\pi\,(h6 + h_1 6' + h_2 6'').$$

Les quantités h, h_1, h_2, sont les cosinus des angles, que fait la direction de la vitesse $\frac{ds}{dt}$ du point G (n° 12), avec les axes des x, y, z; on aura donc

$$\frac{ds}{dt}h = \frac{dx}{dt},\quad \frac{ds}{dt}h_1 = \frac{dy}{dt},\quad \frac{ds}{dt}h_2 = \frac{dz}{dt};$$

par conséquent, il en résultera

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \epsilon kcq &= \epsilon\lambda^4\left(6\frac{dx}{dt} + 6'\frac{dy}{dt} + 6''\frac{dz}{dt}\right)\frac{ds}{dt}, \\ \frac{dq}{dt} - \epsilon kcp &= -\epsilon\lambda^4\left(\alpha\frac{dx}{dt} + \alpha'\frac{dy}{dt} + \alpha''\frac{dz}{dt}\right)\frac{ds}{dt}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

pour les équations du mouvement de rotation, auxquelles on joindra les équations (1) du n° 2, qui pourront s'écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= p\cos\varphi - q\sin\varphi, \\ \sin\theta\frac{d\psi}{dt} &= -p\sin\varphi - q\cos\varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= c + \cos\theta\frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

On peut remarquer qu'en vertu des équations (13) du n° 7, les quantités comprises entre les parenthèses, dans les seconds membres de ces équations (1), sont les composantes x' et y' de la vitesse $\frac{ds}{dt}$, suivant les axes $Gx_{\prime}$ et $Gy_{\prime}$.

(40). Occupons-nous maintenant des trois premières équations (A), qui sont proprement les équations du mouvement de translation.

Les intégrales qu'elles renferment auront pour expressions

$$\begin{aligned}\int_1 V^2 \cos\lambda d\sigma = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} & \Big[(1+5\varepsilon l')\lambda'' l^4 \frac{ds^2}{dt^2}\cos^2\zeta \\ & -\varepsilon\gamma l^4 \frac{ds^2}{dt^2}\cos^2\zeta - 2\varepsilon l^4\lambda'' z'\frac{ds}{dt}\cos\zeta \\ & + 2\varepsilon l^3(q\lambda' - p\mu')\lambda''\frac{ds}{dt}\cos\zeta\Big]\sin\zeta d\zeta d\eta \\ \int_1 V^2 \cos\mu d\sigma = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} & \Big[(1+5\varepsilon l')\mu'' l^4 \frac{ds^2}{dt^2}\cos^2\zeta \\ & -\varepsilon\gamma' l^4 \frac{ds^2}{dt^2}\cos^2\zeta - 2\varepsilon l^4\mu'' z'\frac{ds}{dt}\cos\zeta \\ & + 2\varepsilon l^3(q\lambda' - p\mu')\mu''\frac{ds}{dt}\cos\zeta\Big]\sin\zeta d\zeta d\eta, \\ \int_1 V^2 \cos\nu d\sigma = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} & \Big[(1+5\varepsilon l')\nu'' l^4 \frac{ds^2}{dt^2}\cos^2\zeta \\ & -\varepsilon\gamma'' l^4 \frac{ds^2}{dt^2}\cos^2\zeta - 2\varepsilon l^4\nu'' z'\frac{ds}{dt}\cos\zeta \\ & + 2\varepsilon l^3(q\lambda' - p\mu')\nu''\frac{ds}{dt}\cos\zeta\Big]\sin\zeta d\zeta d\eta,\end{aligned}$$

en négligeant toujours le carré de ε. J'y substitue les formules (F) et (G) du n° 21, à la place de λ', μ', ν', λ'', μ'', ν''; puis j'effectue les intégrations indiquées; il vient

$$\begin{aligned}\int_1 V^2 \cos\lambda d\sigma = {} & \frac{1}{2}\pi l^4 \frac{ds^2}{dt^2} h + 2\pi\varepsilon l^4 \frac{ds^2}{dt^2} h(\gamma h + \gamma' h_1 + \gamma'' h_2) \\ & + \frac{2\pi}{3}\varepsilon l^4 \frac{ds^2}{dt^2}[\gamma(h'^2 + h''^2) + \gamma'(h'h'_1 + h''h''_1) + \gamma''(h'h'_2 + h''h''_2)] \\ & - \frac{2\pi}{3}\varepsilon l^4 \frac{ds^2}{dt^2}\gamma - \frac{4\pi}{3}\varepsilon l^4 \frac{ds}{dt} h z' \\ & + \frac{1}{2}\pi\varepsilon l^3 \frac{ds}{dt}[(q\alpha - p\beta)(2h^2 + h'^2 + h''^2) \\ & + (q\alpha' - p\beta')(2hh_1 + h'h'_1 + h''h''_1) \\ & + (q\alpha'' - p\beta'')(2hh_2 + h'h'_2 + h''h''_2)], \\ \int_1 V^2 \cos\mu d\sigma = {} & \frac{1}{2}\pi l^4 \frac{ds^2}{dt^2} h_1 + 2\pi\varepsilon l^4 \frac{ds^2}{dt^2} h_1(\gamma h + \gamma' h_1 + \gamma'' h_2) \\ & + \frac{2\pi}{3}\varepsilon l^4 \frac{ds^2}{dt^2}[\gamma(h'h'_1 + h''h''_1) + \gamma'(h'^2_1 + h''^2_1) + \gamma''(h'_1h'_2 + h''_1h''_2)] \\ & - \frac{2\pi}{3}\varepsilon l^4 \frac{ds^2}{dt^2}\gamma' - \frac{4\pi}{3}\varepsilon l^4 \frac{ds}{dt} h_1 z' \\ & + \frac{1}{2}\pi\varepsilon l^3 \frac{ds}{dt}[(q\alpha - p\beta)(2hh_1 + h'h'_1 + h''h''_1) \\ & + (q\alpha' - p\beta')(2h_1^2 + h'^2_1 + h''^2_1) \\ & + (q\alpha'' - p\beta'')(2h_1h_2 + h'_1h'_2 + h''_1h''_2)],\end{aligned}$$

$$\int_{,} V^2 \cos s d\sigma = \tfrac{1}{2} \pi l^4 \frac{ds^2}{dt^2} h_2 + 2\pi s l^4 \frac{ds^2}{dt^2} h_2 (\gamma h + \gamma' h_1 + \gamma'' h_2)$$
$$+ \frac{2\pi}{3} s l^4 \frac{ds^2}{dt^2} [\gamma(h' h'_2 + h'' h''_2) + \gamma'(h'_1 h'_2 + h''_1 h''_2) + \gamma''(h'^2_2 + h''^2_2)]$$
$$- \frac{2\pi}{3} s l^4 \frac{ds^2}{dt^2} \gamma'' - \frac{4\pi}{3} s l^4 \frac{ds}{dt} h_2 z'$$
$$+ \tfrac{1}{2} \pi s l^3 \frac{ds}{dt} [(q\alpha - p\beta)(2hh_2 + h'h'_2 + h''h''_2)$$
$$+ (q\alpha' - p\beta')(2h_1 h_2 + h'_1 h'_2 + h''_1 h''_2)$$
$$+ (q\alpha'' - p\beta'')(2h_2^2 + h'^2_2 + h''^2_2)].$$

D'après la nature des neuf quantités h_1, h_2, etc., du n° 12, elles sont liées entre elles par les équations

$$h^2 + h'^2 + h''^2 = 1, \quad h_1^2 + h'^2_1 + h''^2_1 = 1, \quad h_2^2 + h'^2_2 + h''^2_2 = 1,$$
$$hh_1 + h'h'_1 + h''h''_1 = 0, \quad hh_2 + h'h'_2 + h''h''_2 = 0, \quad h_1 h_2 + h'_1 h'_2 + h''_1 h''_2 = 0,$$

qui permettront d'éliminer six de ces quantités des trois formules précédentes, et de n'y laisser que h, h_1, h_2, dont les valeurs sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. En observant que l'on a d'ailleurs (n° 7),

$$z' = \gamma \frac{dx}{dt} + \gamma' \frac{dy}{dt} + \gamma'' \frac{dz}{dt},$$

on trouvera que tous les termes de chacune de ces trois formules, indépendants de p et q, disparaissent excepté le premier, et que ceux qui dépendent de p et q, se réduisent à une forme très simple. En vertu des équations (1), d'où l'on tire

$$\frac{d(p^2 + q^2)}{2dt} = s\lambda^2 \frac{ds}{dt} \Big[p \left(\beta \frac{dx}{dt} + \beta' \frac{dy}{dt} + \beta'' \frac{dz}{dt}\right)$$
$$- q \left(\alpha \frac{dx}{dt} + \alpha' \frac{dy}{dt} + \alpha'' \frac{dz}{dt}\right)\Big],$$

et en substituant dans les trois premières équations (A), les expressions, ainsi réduites, des intégrales qu'elles renferment, nous

aurons

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\,\frac{dx}{dt}\,\frac{ds}{dt} &= \frac{l^2}{5}\,\frac{dx}{ds}\,\frac{d(p^2+q^2)}{ds} - \mu l\,\frac{ds}{dt}(q\alpha - p\beta),\\
\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\,\frac{dy}{dt}\,\frac{ds}{dt} &= \frac{l^2}{5}\,\frac{dy}{ds}\,\frac{d(p^2+q^2)}{ds} - \mu l\,\frac{ds}{dt}(q\alpha' - p\beta'),\\
\frac{d^2z}{dt^2} + \mu\,\frac{dz}{dt}\,\frac{ds}{dt} + g &= \frac{l^2}{5}\,\frac{dz}{ds}\,\frac{d(p^2+q^2)}{ds} - \mu l\,\frac{ds}{dt}(q\alpha'' - p\beta''),
\end{aligned}\right\}\quad (3)$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\mu = \frac{3nD}{8D'l} = \frac{3}{5}\lambda^2 l,$$

de sorte que $\frac{1}{\mu}$ soit, ainsi que $\frac{1}{\lambda}$, une ligne de grandeur donnée.

La détermination du double mouvement du projectile dépendra donc de l'intégration du système des équations (1), (2), (3), qui n'est possible que par approximation. C'est à quoi nous allons procéder dans les deux cas du tir de la bombe et du tir de la carabine, que nous considérerons successivement.

(41). Dans le cas de la bombe, supposons d'abord qu'à l'origine du mouvement, la droite horizontale GL, que nous prenons pour le demi-axe $Gx_{\prime}$, soit perpendiculaire au plan vertical des x et z, dans lequel le centre de gravité G du projectile est lancé (n° 1), et que ce corps reçoive une vitesse de rotation donnée autour de $Gx_{\prime}$ et n'en reçoive aucune autour de $Gy_{\prime}$ et de $Gz_{\prime}$. Tout étant semblable alors de part et d'autre du plan des x et z, il est évident que pendant toute la durée du mouvement, le point G et la section du mobile qui comprend $Gy_{\prime}$ et $Gz_{\prime}$ ne sortiront pas de ce plan vertical. La rotation aura lieu constamment autour de la perpendiculaire à ce même plan; et comme on l'a dit plus haut, on prendra pour l'axe GL la partie de cette perpendiculaire qui fait un angle de 90° avec l'axe Gx. Pour une valeur quelconque de t, nous aurons

$$r = c = 0,\quad q = 0,\quad \gamma = 0,\quad \varphi = 0,\quad \psi = 90°,$$

et en même temps (n° 25),

$$\begin{cases} \alpha = 0, & \beta = \cos\theta, & \gamma = -\sin\theta, \\ \alpha' = -1, & \beta' = 0, & \gamma' = 0, \\ \alpha'' = 0, & \beta'' = \sin\theta, & \gamma'' = \cos\theta; \end{cases}$$

au moyen de quoi les équations (1) et (2) se réduiront à deux seulement, savoir :

$$\frac{dp}{dt} = s\lambda^2 \frac{ds}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dz}{dt}\sin\theta\right), \quad \frac{d\theta}{dt} = p.$$

La bombe tournera donc autour de la droite Gx_1 de direction constante, mais avec une vitesse variable, égale à $\frac{d\theta}{dt}$, positive ou négative, c'est-à-dire dirigée de Gy_1 vers Gz_1 ou de Gz_1 vers Gy_1 (n° 2), selon que l'angle θ ou zGz_1 croîtra ou décroîtra. La quantité comprise entre les parenthèses dans la valeur de $\frac{dp}{dt}$, étant la composante de la vitesse $\frac{ds}{dt}$ suivant l'axe Gy_1, il s'ensuit que cette valeur sera zéro et que la vitesse p atteindra un *maximum* ou un *minimum*, toutes les fois que Gy_1 sera perpendiculaire à la direction de la vitesse du point G, ou que l'axe de figure Gz_1 coïncidera avec cette direction, quel que soit d'ailleurs l'angle θ qu'il fera au même instant, avec la verticale Gz. On saura, à l'origine du mouvement, si le point F appartient au demi-axe Gz_1 ou à son prolongement; par conséquent, on saura aussi, d'après le signe de $\cos\theta$ à un instant quelconque, si le centre de figure F de la bombe, se trouve au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, mené par le centre de gravité G.

En éliminant p entre les deux équations précédentes, on aura

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = s\lambda^2 \frac{ds}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dz}{dt}\sin\theta\right), \qquad (4)$$

pour l'équation qui servira à déterminer, quand la vitesse du point G

sera connue en grandeur et en direction, la valeur de θ en fonction de t, qui exprimera la loi du mouvement de rotation.

Si l'on néglige tout-à-fait la fraction ϵ, on aura

$$\theta = bt + b', \quad p = b;$$

b' et b étant des quantités constantes, pour lesquelles on prendra les valeurs initiales et données de θ et $\frac{d\theta}{dt}$; ce qui exigera que les quantités dépendantes de ϵ, que l'on ajoutera à ces expressions de θ et p pour les compléter, soient zéro pour $t = 0$. Selon que la constante b sera positive ou négative, la rotation initiale aura lieu de Gy, vers $Gz_{\prime}$, ou dans le sens opposé, de manière que dans le cas de b positive, les points de l'hémisphère antérieur du projectile, tourneront de bas en haut, et ceux de son hémisphère postérieur, de haut en bas, tandis que le contraire aura lieu dans le cas de b négative. Pour fixer les idées, je supposerai que la constante b' soit un angle aigu, ce qui revient à prendre pour le demi-axe $Gz_{\prime}$, la partie de l'axe de figure qui se trouvait à l'origine du mouvement, au-dessus du plan horizontal mené par le point G, et qui sera celle qui contient ou qui ne contient pas le point F, selon qu'à cette époque, ce second point était plus élevé ou moins élevé que le point G.

(42). Les valeurs zéro des variables y, q, $6'$, font disparaître la seconde équation (3). En ayant égard en outre, aux valeurs de 6 et $6''$, les deux autres équations (3) deviennent

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt}\frac{ds}{dt} &= \frac{2\epsilon l^2}{5} p \frac{dp}{ds}\frac{dx}{ds} + \gamma\epsilon l p \frac{ds}{dt}\cos\theta, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \mu \frac{dz}{dt}\frac{ds}{dt} + g &= \frac{2\epsilon l^2}{5} p \frac{dp}{ds}\frac{dz}{ds} + \gamma\epsilon l p \frac{ds}{dt}\sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Leurs seconds membres ayant p pour facteur, il s'ensuit que l'excentricité FG de la bombe, provenant de sa non-homogénéité, ne peut influer sur le mouvement de translation qu'à raison de la rotation.

Pour les intégrer par approximation, j'observe qu'en négligeant tout-à-fait ε, on satisfait à la première de ces deux équations, en faisant

$$\frac{dx}{dt} = ae^{-\mu s};$$

e désignant à l'ordinaire la base des logarithmes népériens, et a une constante arbitraire, pour laquelle on prendra la composante horizontale de la vitesse du centre G à son point de départ, ou correspondante à $s = 0$. Pour tenir compte de la première puissance de ε, je ferai donc

$$\frac{dx}{dt} = a(1 + \varepsilon u)e^{-\mu s};$$

u étant une nouvelle variable qui devra être zéro pour $t = 0$. En représentant par ω la tangente de l'angle que la tangente en un point quelconque de la trajectoire du centre G fait avec une parallèle à l'axe des x menée par ce point, on aura

$$\frac{dz}{dx} = \omega, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + \omega^2}.$$

Au degré d'approximation où nous devons nous arrêter, c'est-à-dire, en négligeant le carré de ε, on pourra substituer pour p et θ leurs valeurs précédentes, avec la première valeur de $\frac{dx}{dt}$, dans le second membre de la première équation (5); alors on aura simplement

$$\frac{du}{dt} = ulb\sqrt{1 + \omega^2}\cos(bt + b'). \qquad (6)$$

La valeur de $\frac{dz}{dt}$ étant

$$\frac{dz}{dt} = \omega\frac{dx}{dt},$$

la seconde équation (5) deviendra, en ayant égard à la première, et

faisant les réductions,

$$\frac{dx}{dt}\frac{d\omega}{dt} = -g + \epsilon\mu lba\sqrt{1+\omega^2}[\sin(bt+b') - \omega\cos(bt+b')]\,e^{-\mu s};$$

en y joignant l'équation

$$\frac{dx^2}{dt^2} = a^2(1 + \epsilon u)^2 e^{-2\mu s},$$

et divisant ces deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{d\omega}{ds} = -\frac{g}{a^2}e^{2\mu s}(1-2\epsilon u) + \frac{\epsilon\mu lb}{a}\sqrt{1+\omega^2}[\sin(bt+b') - \omega\cos(bt+b')]\,e^{\mu s},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\sqrt{1+\omega^2}\,d\omega = -\frac{1}{2h}e^{2\mu s}ds + \frac{\epsilon}{h}e^{2\mu s}u\,ds$$
$$+ \frac{\epsilon\mu lb}{a}\sqrt{1+\omega^2}[\sin(bt+b') - \omega\cos(bt+b')]\,e^{\mu s}ds,$$

où l'on a désigné par h la hauteur due à la vitesse a, de sorte qu'on ait

$$a^2 = 2gh.$$

En intégrant, nous aurons

$$\omega\sqrt{1+\omega^2} + \log(\omega + \sqrt{1+\omega^2}) - \gamma + \frac{1}{2\mu h}e^{2\mu s} = \frac{2\epsilon}{h}\int e^{2\mu s}u\,ds$$
$$+ \frac{2\epsilon\mu lb}{\sqrt{2gh}}\int[\sin(bt+b') - \omega\cos(bt+b')]\sqrt{1+\omega^2}\,e^{\mu s}ds;$$

γ étant la constante arbitraire, dont la valeur sera

$$\gamma = \frac{1}{2\mu h} + \text{tang}\,\alpha\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha} + \log(\text{tang}\,\alpha + \sqrt{1+\text{tang}^2\alpha});$$

en désignant par α la valeur de ω au point de départ du centre G, ou l'angle de *tir* du projectile, et supposant que les intégrales indiquées dans l'équation précédente commencent à $s = 0$.

En négligeant ε, cette équation donne

$$e^{\mu s} = \sqrt{2\mu h}\sqrt{\gamma - \omega\sqrt{1+\omega^2} - \log(\omega + \sqrt{1+\omega^2})};$$

si donc, on fait pour abréger

$$\gamma - \omega\sqrt{1+\omega^2} - \log(\omega + \sqrt{1+\omega^2}) = Q^2,$$
$$[\sin(bt+b') - \omega\cos(bt+b')]\sqrt{1+\omega^2} = \mathrm{R},$$

on pourra écrire cette même équation sous la forme :

$$\frac{1}{2\mu h} e^{2\mu s} - Q^2 = 4\varepsilon\mu\int Q^2 u\,ds + 2\varepsilon\mu lb\sqrt{\frac{\mu}{g}}\int \mathrm{R}Q\,ds.$$

L'équation qui donne la valeur de $\frac{d\omega}{dx}$, pourra aussi s'écrire de cette manière :

$$(1 + 2\varepsilon u)\frac{d\omega}{\mu dx} + \frac{1}{2\mu h} e^{2\mu s} = \varepsilon lb\sqrt{\frac{\mu}{g}}\mathrm{R}Q.$$

En en retranchant la précédente membre à membre, on aura donc

$$(1 + 2\varepsilon u)\frac{d\omega}{\mu dx} + Q^2 = \varepsilon lb\sqrt{\frac{\mu}{g}}\mathrm{R}Q - 2\varepsilon\mu lb\sqrt{\frac{\mu}{g}}\int \mathrm{R}Q\,ds - 4\varepsilon\mu\int Q^2 u\,ds;$$

d'où l'on déduit

$$\left.\begin{aligned} \mu dx &= -\frac{d\omega}{Q^2} - \frac{\varepsilon d\omega}{Q^4}\mathrm{P}, \\ \mu dz &= -\frac{\omega d\omega}{Q^2} - \frac{\varepsilon\omega d\omega}{Q^4}\mathrm{P}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{P} = 2uQ^2 + 4\mu\int Q^2 u\,ds + lb\sqrt{\frac{\mu}{g}}\mathrm{R}Q - 2\mu\int \mathrm{R}Q\,ds.$$

D'après l'équation qui donne la valeur de $\frac{dx}{dt}\frac{d\omega}{dt}$, on aura

$$\frac{1}{\mu Q^2}\frac{d\omega^2}{dt^2}\left(1+\frac{\varepsilon P}{Q^2}\right)=g\left[1-\frac{\varepsilon bl\sqrt{\mu}R}{\sqrt{g}Q}\right];$$

d'où l'on tire

$$\sqrt{g\mu}\,dt=-\left[1+\frac{\varepsilon P}{2Q^2}+\frac{\varepsilon bl\sqrt{\mu}R}{2\sqrt{g}Q}\right]\frac{d\omega}{Q}; \qquad (8)$$

en observant que l'angle ω décroissant quand le temps t augmente, il faut prendre le signe $-$ devant le radical qui exprimerait la valeur de $\frac{d\omega}{dt}$.

Enfin, on aura

$$\frac{ds^2}{dt^2}=\frac{g(1+\omega^2)}{\mu Q^2}\left[1+\frac{\varepsilon P}{Q^2}-\frac{\varepsilon bl\sqrt{\mu}R}{\sqrt{g}Q}\right], \qquad (9)$$

pour l'expression du carré de la vitesse du centre de gravité G ou du mouvement de translation de la bombe.

(43). Les formules (7) feront connaître par les quadratures, les valeurs de x et z correspondantes à chaque valeur de ω, après qu'on y aura mis pour t ses valeurs approchées et données par le premier terme de la formule (8), et pour u ses valeurs calculées, aussi par les quadratures, au moyen de la formule (6). Ces valeurs numériques de x et y serviront à construire par points, la trajectoire du centre G. La formule (8) déterminera de la même manière, le temps que G emploiera à parvenir en chaque point de cette courbe. Cela étant, les formules (7) et (8), jointes à l'équation (9), renfermeront la détermination complète du mouvement de translation, du moins au degré d'approximation où nous nous sommes arrêté, c'est-à-dire, en négligeant les quantités de l'ordre de petitesse du carré de ε. Les parties de ces diverses formules qui sont indépendantes de cette fraction, coïncident avec les formules ordinaires de la balistique.

La quantité P que contiennent les termes dépendants de ε, peut être simplifiée par l'élimination de u, dont la valeur en fonction de ω, résultant de la formule (6) en y faisant

$$dt = -\frac{d\omega}{\sqrt{\mu g}\,Q}, \quad t = -\frac{1}{\sqrt{\mu g}}\int\frac{d\omega}{Q},$$

dépendrait en conséquence de deux quadratures successives.

En effet, en négligeant ε dans cette quantité P, on y pourra faire

$$ds = \sqrt{1+\omega^2}\,dx = -\frac{\sqrt{1+\omega^2}\,d\omega}{\mu Q^2};$$

et comme on a identiquement

$$\sqrt{1+\omega^2}\,d\omega = -\tfrac{1}{2}d.Q,$$

il en résultera

$$2\mu\int Q^2 u ds = \int u d.Q^2 = uQ^2 - \int Q^2 du;$$

ce qui fera disparaître u de l'expression de P.

En changeant u en cette autre quantité $\frac{R}{Q}$, on aura de même

$$2\mu\int RQ = RQ - \int Q^2 d.\frac{R}{Q}.$$

Au moyen de la formule (6) et de la valeur précédente de dt qu'on y doit employer, on aura aussi

$$du = -\frac{bl\sqrt{\mu}}{Q\sqrt{g}}\sqrt{1+\omega^2}\cos(bt+b')\,d\omega.$$

Cela étant, nous aurons

$$P = -2bl\sqrt{\frac{\mu}{g}}\left[\int Q\sqrt{1+\omega^2}\cos(bt+b')\,d\omega - \frac{1}{2}\int Q^2 d.\frac{R}{Q}\right],$$

pour l'expression la plus simple de P.

La valeur numérique de cette quantité, correspondante à chaque valeur donnée de ω, exigerait néanmoins un calcul très pénible; mais la considération du facteur $bl\sqrt{\frac{\mu}{g}}$, commun à tous les termes qui dépendent en outre de ϵ dans les formules (7), (8), (9), suffit pour montrer que l'influence de la rotation du projectile sur son mouvement de translation, est très petite et négligeable dans le tir de la bombe, du moins dans la supposition du nº 41.

S'il s'agit, par exemple, de la bombe de 27 centimètres de diamètre, et du poids de 51 kilogrammes, on pourra évaluer à 2500 mètres la longueur de la ligne $\frac{1}{\mu}$. En prenant la seconde et le mètre pour unités de temps et de longueur, la quantité g est à très peu près égale au nombre π^2. Si donc on suppose la vitesse initiale de rotation b, telle qu'en vertu de cette vitesse, le projectile ferait un nombre n de tours pendant toute la durée du trajet, et si l'on prend environ 16 secondes pour cette durée, en supposant que le tir ait lieu sous l'angle de 45°, on aura

$$b = \frac{2\pi n}{16}, \quad 2l = 0{,}27, \quad bl\sqrt{\frac{\mu}{g}} = \frac{(0{,}27)\,n}{800};$$

en sorte que si l'on avait $n = 1$, ce qui est sans doute exagéré dans la pratique, et $\epsilon = 0{,}01$, le produit de ϵ et de $bl\sqrt{\frac{\mu}{g}}$, qui mesure pour ainsi dire l'influence de la rotation et de l'excentricité de la bombe sur son mouvement de translation, serait à peine un dix-millième.

(44). En vertu des formules (7) et (9), et en négligeant toujours le carré de ϵ, l'équation (4), multipliée par dt, deviendra

$$d.\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\epsilon\lambda^2\sqrt{g(1+\omega^2)}}{\mu\sqrt{\mu Q^3}}(\cos\theta + \omega\sin\theta)\,d\omega. \quad (10)$$

Si l'excès de θ sur $bt + b'$, qui serait nul dans le cas de $\epsilon = 0$, demeure un très petit angle pendant toute la durée du mouvement, on pourra aussi mettre $bt + b'$ à la place de θ dans le second membre de cette équation. Alors, au moyen de la valeur de t, correspondante à chaque valeur de ω, on calculera, par une première et une seconde quadrature, les valeurs de $\frac{d\theta}{dt}$ et θ, relatives à cette valeur de ω; on connaîtra donc en chaque point de la trajectoire du centre de gravité G, la vitesse de rotation p du mobile, et l'angle $zGz_{\prime}$ de son axe de figure avec la verticale; ce qui achèvera la solution du problème.

A l'origine du mouvement, si le projectile n'a reçu aucune vitesse de rotation, de manière qu'on ait $b = 0$, on aura, à un instant quelconque,

$$d.\frac{d\theta}{dt} = dp = -\frac{i\lambda^{2}\sqrt{g(1+\omega^{2})}}{\mu\sqrt{\mu}Q^{3}}(\cos b' + \omega \sin b')\, d\omega.$$

En mettant $-QdQ$ au lieu de $\sqrt{1+\omega^{2}}\,d\omega$, et intégrant une première fois, on en déduit

$$p = \mathrm{C} - \frac{i\lambda^{2}\sqrt{g}}{Q\mu\sqrt{\mu}}(\cos b' + \omega \sin b') + \frac{i\lambda^{2}}{\mu}\sqrt{\frac{g}{\mu}}\int\frac{d\omega}{Q}\sin b';$$

C étant la constante arbitraire. D'après la formule (8), on fera, dans cette dernière,

$$\frac{d\omega}{Q} = -dt\sqrt{g\mu}, \quad \int\frac{d\omega}{Q} = -t\sqrt{g\mu};$$

et en déterminant C de sorte qu'on ait à la fois

$$t = 0, \quad p = 0, \quad \omega = \operatorname{tang}\alpha, \quad Q^{2} = \frac{1}{2\mu h},$$

nous aurons

$$p = \frac{\epsilon\lambda^2}{\mu}\sqrt{\frac{g}{\mu}}\Big[(\cos b' + \text{tang}\,\alpha \sin b')\sqrt{2\mu h}$$
$$- (\cos b' + \omega \sin b')\frac{1}{Q} - t\sqrt{g\mu}\sin b'\Big].$$

Multipliant par dt, intégrant de nouveau, de manière qu'on ait $\theta = b'$ pour $t = 0$, observant qu'on a

$$\sqrt{2gh} = a, \quad \lambda^2 = \frac{5\mu}{2l},$$

et qu'on doit prendre

$$\int\frac{dt}{Q} = -\frac{1}{\sqrt{g\mu}}\int\frac{d\omega}{Q^3} = x\sqrt{\frac{\mu}{g}},$$
$$\int\frac{\omega dt}{Q} = -\frac{1}{\sqrt{g\mu}}\int\frac{\omega d\omega}{Q^3} = z\sqrt{\frac{\mu}{g}},$$

il en résultera

$$\theta - b' = \frac{5\epsilon}{2l}\left[at(\cos b' + \text{tang}\,\alpha \sin b') - x\cos b'\right.$$
$$\left. - \left(z + \tfrac{1}{2}gt^2\right)\sin b'\right].$$

Ainsi, lorsque la rotation initiale du mobile est nulle, l'angle θ s'exprime très simplement au moyen des variables x, z, t; et comme on voit, sa valeur à chaque instant ne dépend de la résistance de l'air qu'à raison de l'influence de cette force sur la trajectoire du point G, ou sur les grandeurs de ses coordonnées x et z à cet instant. Mais on ne doit pas oublier que ce résultat remarquable suppose l'angle $\theta - b'$ très petit; ce qui exigera, en général, que la fraction ϵ soit extrêmement petite. Il n'a plus lieu dès que la valeur précédente de $\theta - b'$ cesse d'être fort petite par l'accroissement des variables x, z, t. C'est le cas où la méthode des approximations successives est en défaut, comme dans le calcul des perturbations planétaires, lorsque le temps sort des sinus et cosinus par le fait de ces

approximations. Pour déterminer les valeurs de θ, relatives aux différents points de la trajectoire, il faudra, dans ce cas, reprendre l'équation (10), et recourir à la méthode des quadratures appliquée à une équation différentielle, dans laquelle les variables ne sont pas séparées.

Dans le cas du vide, on a

$$x = at, \quad z = at \operatorname{tang} \alpha - \tfrac{1}{2} gt^2;$$

ce qui réduit l'équation précédente à $\theta - b' = 0$, et l'angle θ à une quantité constante; résultat exact, puisque la pesanteur étant alors la seule force qui agisse sur les points du projectile, elle ne peut faire tourner ce corps autour de son centre de gravité.

(45). Pour connaître maintenant la quantité dont la non-homogénéité de la bombe peut faire dévier ce point G, en dehors du plan vertical des x et z, dans lequel il a été lancé primitivement, je supposerai que l'axe de rotation du mobile ne soit pas constamment perpendiculaire à ce plan, ni son axe de figure constamment compris dans ce même plan. Les quantités q et $\mathcal{C}'$ ne seront plus nulles, comme dans le cas précédent; on ne satisfera plus à la seconde équation (3) au moyen de $y = 0$; la valeur de y qu'on en déduira exprimera la déviation demandée; et comme y et $\frac{dy}{dt}$ sont zéro à l'origine du mouvement, elle ne proviendra que de l'excentricité du mobile, et pourra être supposée très petite comme la fraction ε. On pourra, en conséquence, négliger $\frac{dy}{ds}$, ou le rapport de $\frac{dy}{dt}$ à $\frac{ds}{dt}$, dans le second membre de l'équation dont il s'agit, où ce rapport est multiplié par ε; ce qui réduira cette équation à

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu \frac{dy}{dt} \frac{ds}{dt} = - \varepsilon l \mu (q\alpha' - p\mathcal{C}') \frac{ds}{dt}.$$

En y faisant

$$\frac{dy}{dt} = y' e^{-\mu s}$$

il en résultera

$$dy' = -\epsilon l\,(q\alpha' - p\beta')\,d.e^{\mu s}.$$

On prendra dans cette formule, $\sqrt{2\mu h}\,Q$ pour la valeur de $e^{\mu s}$ (n° 42), et $-\frac{d\omega}{\sqrt{\mu g Q}}$ pour la valeur de dt, d'après la formule (8) réduite à son premier terme. On en conclura ensuite

$$\left.\begin{array}{l} y' = e^{\mu s}\frac{dy}{dt} = -\epsilon l\sqrt{2\mu h}\int(q\alpha' - p\beta')\,dQ, \\ y = \frac{\epsilon l}{\sqrt{\mu g}}\int\left[\int(q\alpha' - p\beta')\,dQ\right]\frac{d\omega}{Q^2}; \end{array}\right\} \quad (11)$$

les intégrales commençant au point de départ du mobile, ou étant nulles pour $\omega = \text{tang}\,\alpha$.

Au moyen des équations (1) et (2) du mouvement de rotation, dans lesquelles on supprimera le terme dépendant de $\frac{dy}{dt}$, on calculera par les quadratures la valeur de la quantité $q\alpha' - p\beta'$, relative à chaque valeur de ω. On aura donc ensuite, par de nouvelles quadratures, les valeurs de la vitesse $\frac{dy}{dt}$ et de la déviation y, perpendiculaires au plan des x et z, et correspondantes à chaque point de la trajectoire de G; ce qu'il s'agissait de trouver. Ces calculs numériques seraient fort compliqués et peu utiles à la pratique; mais il y a un cas, que nous considérerons en particulier, dans lequel les valeurs de y et $\frac{dy}{dt}$ s'expriment très simplement en fonctions de x et de t.

(46). Si l'on suppose la vitesse c nulle ou seulement très petite, la valeur de $q\alpha' - p\beta'$, relative à chaque valeur de ω, que l'on déduira des équations (1) et (2), se composera d'une partie constante et d'une partie qui variera d'un point à un autre de la trajectoire. Or, le cas qu'il s'agira de considérer est celui où cette seconde partie

demeurera très petite pendant toute la durée du mouvement; en sorte qu'on puisse la négliger dans les formules (11), et y regarder $q\alpha' - p\beta'$ comme une quantité constante.

Soit ρ la résultante des deux vitesses p et q; désignons par GI' la projection de l'axe instantané GI sur le plan des $Gx_{,}$ et $Gy_{,}$ de ces deux composantes; nous aurons

$$q = \rho \sin \mathrm{I'G}x_{,}, \quad p = \rho \cos \mathrm{I'G}x_{,}.$$

Désignons aussi par Gy' la projection de Gy sur ce même plan. Il en résultera

$$\alpha' = \cos x_{,}Gy = \sin z_{,}Gy \cos y'Gx_{,},$$
$$\beta' = \cos y_{,}Gy = \sin z_{,}Gy \sin y'Gx_{,};$$

on aura donc

$$q\alpha' - p\beta' = \rho \sin z_{,}Gy (\sin \mathrm{I'G}x_{,} \cos y'Gx_{,} - \cos \mathrm{I'G}x_{,} \sin y'Gx_{,}).$$

Les angles $\mathrm{I'G}x_{,}$ et $y'Gx_{,}$ sont comptés à partir du même demi-axe $Gx_{,}$, et dans le même sens, de $Gx_{,}$ vers $Gy_{,}$: ils peuvent s'étendre depuis zéro jusqu'à 360°. L'angle $z_{,}Gy$ ne peut s'étendre que depuis zéro jusqu'à 180°; ce qui rend son sinus positif. La vitesse ρ est aussi une quantité positive. Par conséquent, on aura sans aucune ambiguité

$$q\alpha' - p\beta' = \rho \sin z_{,}Gy \sin \mathrm{I'G}y'.$$

La valeur de ce produit sera donnée à l'origine du mouvement; je la représenterai par n, qui sera une quantité positive ou négative, selon qu'en allant du demi-axe $Gx_{,}$ vers $Gy_{,}$, on rencontrera la droite GI' avant ou après Gy' : elle sera nulle, soit quand l'axe de figure $Gz_{,}$ aura une direction perpendiculaire au plan des x et z, ce qui rendra nul l'angle $z_{,}Gy$; soit lorsque cet axe $Gz_{,}$, l'axe instantané de rotation GI et l'axe Gy se trouveront tous les trois dans un même plan, ce qui rendra zéro l'angle $\mathrm{I'G}y'$. Ce second cas comprend celui que

nous avons examiné plus haut (n° 41), et où Gx, ou GL était dans le prolongement de Gy.

Cela posé, en observant que la valeur de Q est $\frac{1}{\sqrt{2\mu h}}$ à l'origine des intégrales contenues dans les formules (11), la première donnera

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{m}\,\varepsilon l n \left(1 - \frac{1}{Q\sqrt{2\mu h}}\right),$$

en ayant aussi égard à la valeur $Q\sqrt{2\mu h}$ de $e^{m\omega}$. Cette exponentielle étant constamment plus grande que l'unité, on en conclut que la vitesse $\frac{dy}{dt}$ aura constamment le même signe, c'est-à-dire un signe contraire à celui de m, qui se déterminera d'après les signes de n et de ν. La limite des valeurs de cette vitesse, qu'elle atteindrait dans la branche descendante de la trajectoire pour une valeur infinie de ω, serait $\varepsilon l n$, abstraction faite du signe, et par conséquent très petite, relativement à la vitesse $\frac{ds}{dt}$.

La seconde équation (11) devient d'abord

$$y = \frac{\varepsilon l n}{\sqrt{g\mu}} \int \left(Q - \frac{1}{\sqrt{2\mu h}}\right)\frac{d\omega}{Q}.$$

D'après les premiers termes des formules (7) et (8), on y fera

$$\frac{d\omega}{Q} = -\mu dx, \quad \frac{d\omega}{Q} = -\sqrt{g\mu}\, dt;$$

et à cause de $\sqrt{2gh} = a$, on en déduira

$$y = \frac{\varepsilon l n}{a}(x - at),$$

pour l'expression fort simple de la déviation perpendiculaire au plan des x et z. Sa différentielle conservant le même signe pendant toute la durée du mouvement, cette déviation aura lieu constamment

d'un même côté de ce plan, et n'atteindra pas de *maximum*. Dans le vide, où l'on a

$$x = at, \quad \mu = 0, \quad Q\sqrt{2\mu h} = 1,$$

les valeurs de y et $\frac{dy}{dt}$ seront zéro.

Sous l'angle de tir de $45°$, et pour une portée d'environ 1200^m, la vitesse de projection, dans l'exemple du n° 43, est d'après Lombard, d'environ 120^m par seconde; sa composante horizontale est $\frac{120^m}{\sqrt{2}}$, ou à peu près 80^m; le temps du trajet étant de 16 secondes, et le diamètre du projectile égal à $0^m,27$, la formule précédente donnera aussi à très peu près,

$$y = \text{[illegible]}\; n\,(0^m,135),$$

pour la déviation horizontale au point de chute de la bombe; en sorte qu'il faudrait que la vitesse angulaire n fût extrêmement grande pour que cette déviation, due à la petite excentricité GF, devînt seulement égale à un mètre. Cette conclusion, jointe à celle du n° 43, prouve que dans le tir de la bombe sphérique, sa non-homogénéité a très peu d'influence, en général, sur le mouvement de translation, quoiqu'elle puisse en avoir beaucoup, comme on l'a vu plus haut, sur la rotation de ce projectile.

(47). Appliquons actuellement le système des équations (1), (2), (3), au tir de la carabine rayée en hélice.

Dans ce cas, la trajectoire du centre de gravité G s'écarte constamment fort peu de l'axe des x, horizontal et compris dans le plan vertical où ce point a été lancé primitivement. Les composantes $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ de $\frac{ds}{dt}$ sont donc très petites par rapport à cette vitesse, pendant toute la durée du mouvement. C'est pourquoi nous négligerons leurs carrés, leurs produits, et les produits $s\,\frac{dy}{dt}$ et $s\,\frac{dz}{dt}$, à l'exception, toutefois, de ce dernier produit dans les seconds membres des

équations (1), où les termes dépendants de $\varepsilon \frac{dz}{dt}$ ne seront pas, dans notre exemple, d'un ordre de grandeur moindre que ceux qui en sont indépendants, ainsi qu'on le verra par la suite. De cette manière, on aura $\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}$, et les équations (1) et (3) se réduiront à

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} + \varepsilon kcq &= \frac{5\varepsilon\mu}{2l}\frac{dx^2}{dt^2}\left(\mathcal{C} + \mathcal{C}'\frac{dz}{dx}\right),\\
\frac{dq}{dt} - \varepsilon kcp &= -\frac{5\varepsilon\mu}{2l}\frac{dx^2}{dt^2}\left(\alpha + \alpha''\frac{dz}{dx}\right),\\
\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx^2}{dt^2} &= \frac{\varepsilon l^2}{5}\frac{d(p^2+q^2)}{dx} - \varepsilon\mu l(q\alpha - p\mathcal{C})\frac{dx}{dt},\\
\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt} &= -\varepsilon\mu l(q\alpha' - p\mathcal{C}')\frac{dx}{dt},\\
\frac{d^2z}{dt^2} + \mu\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt} + g &= -\varepsilon\mu l(q\alpha'' - p\mathcal{C}'')\frac{dx}{dt}.
\end{aligned}\right\}\quad (12)$$

Or, si l'on désigne par b la valeur initiale de $\frac{dz}{dx}$, ou de la tangente de l'angle du tir, et par a la vitesse de projection du centre G, qu'on pourra aussi prendre pour la valeur initiale de $\frac{dx}{dt}$; et si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{g}{2\mu a^2} = g', \quad b + g' - g'(1 + \mu at)^2 = \zeta,$$

on satisfera aux trois dernières de ces équations (12), en prenant (n° 26),

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{1 + \mu at} + \varepsilon u, \quad \frac{dy}{dt} = \varepsilon v, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{a\zeta}{1 + \mu at} + \varepsilon w;$$

u, v, w, étant trois nouvelles variables qui devront être nulles pour $t = 0$. Il faudra que g' et ζ soient des quantités du même ordre que b, afin que la vitesse $\frac{dz}{dt}$ demeure toujours très petite par rapport à $\frac{dx}{dt}$. On négligera le carré de ζ et le produit $\varepsilon\zeta$, comme le carré de $\frac{dz}{dt}$

et le produit $\varepsilon \frac{dz}{dt}$. La constante b sera la valeur de ζ qui répond à $t=0$; le tir ayant lieu au-dessus du plan horizontal, mené par le point G, cette constante sera une quantité positive; et l'on pourra la prendre pour l'angle du tir dont elle est la tangente, et faire $\sin b = b$ et $\cos b = 1$.

Par la substitution de ces valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, dans les équations auxquelles elles doivent satisfaire, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{2\mu a u}{1+\mu a t} &= \frac{l^2(1+\mu a t)}{5a}\frac{d(p^2+q^2)}{dt} - \frac{\mu l a}{1+\mu a t}(q\alpha - p\beta), \\ \frac{dv}{dt} + \frac{\mu a v}{1+\mu a t} &= -\frac{\mu l a}{1+\mu a t}(q\alpha' - p\beta'), \\ \frac{dw}{dt} + \frac{\mu a w}{1+\mu a t} &= -\frac{\mu l a}{1+\mu a t}(q\alpha'' - p\beta''), \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

pour les équations d'où l'on tirera les valeurs de u, v, w, lorsque celles de p, q, α, β, etc., auront été déterminées au moyen des deux premières équations (12), savoir :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \varepsilon k c q &= \frac{5\varepsilon\mu a^2(\beta + \beta''\zeta)}{2l(1+\mu a t)^2}, \\ \frac{dq}{dt} - \varepsilon k c p &= -\frac{5\varepsilon\mu a^2(\alpha + \alpha''\zeta)}{2l(1+\mu a t)^2}, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

auxquelles on joindra les équations (2) et les expressions de α, β, etc., du n° 25.

La balle, en sortant de la carabine, est animée d'une vitesse de rotation très rapide, autour du prolongement de l'axe de l'arme, c'est-à-dire autour d'un diamètre qui s'écarte très peu de la ligne de tir. Ce petit écart est dû généralement à des causes qui ont lieu tantôt dans un sens et tantôt dans un autre; son influence sur la justesse du tir, se détruit dans les résultats moyens d'un grand nombre d'épreuves; c'est pourquoi nous en ferons abstraction, et nous supposerons qu'à l'origine du mouvement, l'axe instantané GI, ou son prolongement, coïncidait avec la direction de la vitesse du point G. De plus, pour ne

pas rendre le calcul des valeurs approchées de p, q, φ, ψ, θ, trop compliqué et presque impraticable, on supposera aussi, comme dans le n° 27, que cet axe GI s'écarte constamment très peu de l'un des trois axes principaux du projectile. Mais nous considérerons successivement le cas où cet axe principal est l'axe de figure $Gz_{\prime}$, et celui où il est l'axe $Gy_{\prime}$ compris à l'origine du mouvement dans le plan vertical des x et z : l'examen de ces deux cas conduira à des conséquences très différentes, et suffira pour donner une idée précise de l'influence de la non-homogénéité d'un projectile sphérique, sur sa rotation et par suite sur son mouvement de translation. Dans l'un et l'autre cas, nous supposerons, pour plus de simplicité, que la rotation initiale a lieu exactement autour de l'axe principal, ou autrement dit, nous ferons abstraction du petit écart qui pourra exister à l'origine du mouvement, tantôt dans un sens et tantôt dans un autre, entre l'axe $Gz_{\prime}$ ou l'axe $Gy_{\prime}$, et l'axe de rotation.

(48). Je suppose donc, en premier lieu, que l'axe instantané GI coïncide, quand le mouvement commence, avec l'axe de figure, et s'en écarte constamment très peu. La constante c sera une très grande vitesse angulaire qui aura pour valeur

$$c = \frac{2\pi a}{i},$$

en désignant par i la même ligne que dans le n° 28. Les variables p et q seront zéro pour $t = 0$, et demeureront constamment très petites par rapport à c. Cette constante étant positive, ce sera de la partie $Gz_{\prime}$ de l'axe de figure que l'axe GI s'écartera constamment très peu; en sorte que l'angle $IGz_{\prime}$ sera toujours très petit, et à peu près égal à $\frac{1}{c}\sqrt{p^2 + q^2}$. A l'origine du mouvement, la droite GL sera perpendiculaire au plan des x et z. Si la rotation initiale a lieu de la droite à la gauche de l'observateur tourné vers Gx, l'angle LGx, à cette époque, sera égal à 90°; il sera égal à 270°, si cette rotation a lieu de gauche à droite. Pour que l'axe de figure coïncide au même

instant avec la direction du tir, il est aisé de voir qu'il faudra que la partie Gz, de cet axe fasse l'angle $90° + b$ avec l'axe Gz, et que ce soit son prolongement qui tombe sur la ligne de tir, dans le cas du premier sens de rotation, tandis que dans le cas de l'autre sens, ce sera cette partie Gz, même qui tombera sur la ligne de tir, en faisant l'angle $90° - b$ avec la verticale Gz.

Puisque les vitesses p et q sont, par hypothèse, constamment très petites, il suit des deux premières équations (2), que les quantités $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\psi}{dt}$ le seront aussi, ou, autrement dit, que les parties variables de θ et ψ, seront constamment de très petits angles. Nous ferons donc, à un instant quelconque,

$$\theta = 90° \pm b + \theta', \quad \psi = 180° \mp 90° + \psi',$$

en prenant les signes supérieurs ou inférieurs, selon que la rotation initiale aura eu lieu de droite à gauche ou de gauche à droite, et désignant par θ' et ψ' des variables très petites, telles que l'on négligera les carrés et les produits de θ', ψ', b, et qui seront nulles pour $t = 0$. D'après la troisième équation (2), et en observant que φ est zéro pour $t = 0$, on aura $\varphi = ct$, au bout d'un temps quelconque; et de ces valeurs de θ, ψ, φ, il résultera (n° 25)

$$\begin{aligned}
\alpha &= \pm(\mp b - \theta')\sin ct \mp \psi' \cos ct, \\
6 &= \pm(\mp b - \theta')\cos ct \pm \psi' \sin ct, \\
\alpha' &= \mp \cos ct, \qquad 6' = \pm \sin ct, \\
\alpha'' &= \sin ct, \qquad 6'' = \cos ct.
\end{aligned}$$

De cette manière, les deux premières équations (2) et les équations (14) deviendront

$$\frac{d\theta'}{dt} - p \cos ct + q \sin ct = 0,$$
$$\frac{d\psi'}{dt} + p \sin ct + q \cos ct = 0,$$

$$\frac{dp}{dt} + \epsilon kcq = -\frac{5\epsilon\mu a^2}{2l(1+\mu at)^2}\left[(b \pm \theta' - \zeta)\cos ct \mp \psi' \sin ct\right],$$
$$\frac{dq}{dt} - \epsilon kcp = \frac{5\epsilon\mu a^2}{2l(1+\mu at)^2}\left[(b \pm \theta' - \zeta)\sin ct \pm \psi' \cos ct\right].$$

Par le procédé d'intégration du n° 29, on en déduit

$$\frac{p}{c} = \mp \frac{f[fp'\cos ct + fq'\sin ct \pm (b-\zeta)\sin ct]}{(1+\mu at)^2},$$
$$\frac{q}{c} = \pm \frac{f[fp'\sin ct - fq'\cos ct \mp (b-\zeta)\cos ct]}{(1+\mu at)^2},$$
$$\theta' = fq', \qquad \psi' = fp',$$

où l'on a mis l'unité au lieu de $1 + \epsilon k$, et fait, pour abréger,

$$\frac{5\epsilon\mu a^2}{2c^2 l} = f, \qquad \mp \frac{fct}{1+\mu at} = \sigma,$$
$$\cos\sigma \int \frac{(b-\zeta)\cos\sigma}{(1+\mu at)^2}\, cdt + \sin\sigma \int \frac{(b-\zeta)\sin\sigma}{(1+\mu at)^2}\, cdt = p',$$
$$\sin\sigma \int \frac{(b-\zeta)\cos\sigma}{(1+\mu at)^2}\, cdt - \cos\sigma \int \frac{(b-\zeta)\sin\sigma}{(1+\mu at)^2}\, cdt = q';$$

en supposant les intégrales indiquées, nulles pour $t = 0$, afin que p, q, θ', ψ', soient aussi zéro pour cette valeur de t.

En observant qu'on a

$$\frac{fcdt}{(1+\mu at)^2} = \mp d\sigma,$$

et ayant égard à la valeur de $b - \zeta$, on pourra écrire plus simplement les valeurs de p' et q', sous la forme

$$p' = \pm \frac{g}{f}\sin\sigma + g'(\cos\sigma \textstyle\int \cos\sigma . cdt + \sin\sigma \int \sin\sigma . cdt),$$
$$q' = \pm \frac{g}{f}(1 - \cos\sigma) + g'(\sin\sigma \textstyle\int \cos\sigma . cdt - \cos\sigma \int \sin\sigma . cdt),$$

ou bien encore sous celle-ci :

$$p' = \pm \frac{g}{f}\sin\sigma \mp \frac{g'}{f} p_1,$$
$$q' = \pm \frac{g}{f}(1 - \cos\sigma) \mp \frac{g'}{f} q_1;$$

en faisant, pour abréger,

$$\cos\sigma \int (1+\mu a t)^2 \cos\sigma d\sigma + \sin\sigma \int (1+\mu a t)^2 \sin\sigma d\sigma = p_1,$$
$$\sin\sigma \int (1+\mu a t)^2 \cos\sigma d\sigma - \cos\sigma \int (1+\mu a t)^2 \sin\sigma d\sigma = q_1.$$

Dans la pratique, la constante f est une très petite fraction, comme son facteur ε (*). D'après les données du n° 36, on aurait, par exemple,

$$f = (1,0017)\,\varepsilon.$$

Mais il a fallu la conserver dans le calcul, parce qu'elle passe au dénominateur des expressions de p' et q'; ce qui la fait disparaître des valeurs de θ' et ψ', et d'une partie de celles de $\frac{p}{c}$ et $\frac{q}{c}$.

En vertu de la valeur de $b-\zeta$ et des formules précédentes, on aura finalement

$$\left.\begin{aligned}
\frac{p}{c} &= \frac{fg'[(\cos\sigma + q_1)\sin ct - (\sin\sigma - p_1)\cos ct]}{(1+\mu a t)^2} - fg'\sin ct,\\
\frac{q}{c} &= \frac{fg'[(\cos\sigma + q_1)\cos ct + (\sin\sigma - p_1)\sin ct]}{(1+\mu a t)^2} - fg'\cos ct,\\
\theta &= 90^\circ \pm b \pm g'(1 - \cos\sigma - q_1),\\
\psi &= 180^\circ \mp 90^\circ \pm g'(\sin\sigma - p_1).
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

A raison de la petitesse supposée de g', les parties θ' et ψ' des angles θ et ψ, et à plus forte raison les rapports $\frac{p}{c}$ et $\frac{q}{c}$, seront constamment de très petites fractions, comme notre analyse le suppose.

Ces formules (15), jointes aux équations $r = c$ et $\varphi = ct$, renferment les lois complètes de la rotation du mobile, au degré d'approximation où l'on s'est arrêté. Elles sont semblables à celles que nous avons énoncées en détail dans le n° 36, et auxquelles nous n'avons rien à ajouter.

(*) C'est par erreur qu'il a été dit dans le n° 29 que cette quantité n'était pas généralement très petite, afin de motiver sa conservation.

(49). En substituant, dans les seconds membres des équations (13), les valeurs de p et q, et celles de α, β, etc., on négligera le carré de fg et le produit de b et fg'. D'après les formules (15), on aura alors

$$\frac{d(p^2+q^2)}{dt} = 0,$$
$$q\alpha - p\beta = 0,$$
$$q\alpha' - p\beta' = \mp \frac{cfg'(\cos\sigma + q_{,})}{(1+\mu at)^2} \pm cfg',$$
$$q\alpha'' - p\beta'' = \frac{cfg'(\sin\sigma - p_{,})}{(1+\mu at)^2}.$$

Par conséquent, la première équation (13) se réduira à

$$\frac{du}{dt} + \frac{2\mu au}{1+\mu at} = 0;$$

et la variable u devant être zéro pour $t=0$, on en conclura $u=0$ pour toutes les valeurs de t. La variable x devant aussi être nulle au point de départ du mobile, il en résultera

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{1+\mu at}, \quad x = \frac{1}{\mu}\log(1+\mu at);$$

en sorte que les valeurs approchées de x et $\frac{dx}{dt}$, auxquelles nous nous arrêtons, seront indépendantes de la rotation et de l'excentricité du projectile.

En même temps, les deux dernières équations (13) deviendront

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\mu av}{1+\mu at} = \pm \frac{\mu lacfg'(\cos\sigma + q_{,})}{(1+\mu at)^3} \mp \frac{\mu lacfg'}{1+\mu at},$$
$$\frac{dw}{dt} + \frac{\mu aw}{1+\mu at} = - \frac{\mu lacfg'(\sin\sigma - p_{,})}{(1+\mu at)^3}.$$

En intégrant, on aura

$$v = \pm \frac{\mu lafg'}{1+\mu at}\int\frac{(\cos\sigma + q_{,})\,cdt}{(1+\mu at)^2} \mp \frac{\mu lacfg'\,t}{1+\mu at},$$
$$w = - \frac{\mu lafg'}{1+\mu at}\int\frac{(\sin\sigma - p_{,})\,cdt}{(1+\mu at)^2};$$

les intégrales indiquées commençant à $t=0$, afin qu'on ait $v=0$ et $w=0$, pour cette valeur de t.

Au moyen de ces expressions, de v et w, nous aurons

$$\frac{dy}{dt} = \pm \frac{\mu\epsilon lafg'}{1+\mu at}\int\frac{(\cos\varepsilon + q_{,})\,cdt}{(1+\mu at)^2} \mp \frac{\mu lacfg't}{1+\mu at},$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{a\zeta}{1+\mu at} - \frac{\mu\epsilon lafg'}{1+\mu at}\int\frac{(\sin\varepsilon - p_{,})\,cdt}{(1+\mu at)^2}.$$

On a immédiatement

$$\int\frac{\mu at dt}{1+\mu at} = t - \frac{1}{\mu a}\log(1+\mu at),$$
$$\int\frac{a\zeta dt}{1+\mu at} = \frac{1}{\mu}(b+g')\log(1+\mu at) - \frac{g'}{2\mu}(1+\mu at)^2 + \frac{g'}{2\mu};$$

en intégrant par partie, on a aussi

$$\int\left[\frac{\mu a dt}{1+\mu at}\int\frac{(\cos\varepsilon+q_{,})\,cdt}{(1+\mu at)^2}\right] = \log(1+\mu at)\int\frac{(\cos\varepsilon+q_{,})\,cdt}{(1+\mu at)^2}$$
$$-\int\frac{(\cos\varepsilon+q_{,})\log(1+\mu at)\,cdt}{(1+\mu at)^2},$$
$$\int\left[\frac{\mu a dt}{1+\mu at}\int\frac{(\sin\varepsilon-p_{,})\,cdt}{(1+\mu at)^2}\right] = \log(1+\mu at)\int\frac{(\sin\varepsilon-p_{,})\,cdt}{(1+\mu at)^2}$$
$$-\int\frac{(\sin\varepsilon-p_{,})\log(1+\mu at)\,cdt}{(1+\mu at)^2};$$

on déduira donc des formules précédentes,

$$y = \pm\epsilon lfg'\left[\log(1+\mu at)\int\frac{(\cos\varepsilon+q)\,cdt}{(1+\mu at)^2}\right.$$
$$\left.-\int\frac{(\cos\varepsilon+q_{,})\log(1+\mu at)\,cdt}{(1+\mu at)^2}\right]$$
$$\mp\frac{\epsilon lcfg'}{\mu a}\left[\mu at - \log(1+\mu at)\right],$$
$$z = \frac{1}{\mu}(b+g')\log(1+\mu at) + \frac{g'}{2\mu}\left[1-(1+\mu at)^2\right]$$
$$-\epsilon lfg'\left[\log(1+\mu at)\int\frac{(\sin\varepsilon-p_{,})\,cdt}{(1+\mu at)^2}\right.$$
$$\left.-\int\frac{(\sin\varepsilon-p_{,})\log(1+\mu at)\,cdt}{(1+\mu at)^2}\right].$$

Ces expressions des coördonnées y et z, en fonctions de t, jointes à

la valeur précédente de x, feront connaître la position du point G à chaque instant. Toutefois, pour chaque valeur donnée de t, les intégrales qu'elles renferment ne pourront se calculer que par la méthode des quadratures, ou par la réduction en séries convergentes, comme dans le n° 34. Mais si l'on compare les termes dépendants de ϵ, dans les formules (R) du n° 31, à ceux qui leur correspondent dans les formules qu'on vient de trouver, on voit que leur différence essentielle consiste en ce que les termes des premières ont le facteur commun a, au lieu du facteur beaucoup plus petit cl, dont les termes des dernières sont affectés; ce qui montre que dans le cas dont nous nous occupons, l'influence de la non-homogénéité de la balle sur son mouvement de translation, et par conséquent sur la justesse du tir de la carabine, est beaucoup plus faible et peut être négligée relativement à l'influence de la non-sphéricité de ce projectile.

(50). Le second cas du tir de la carabine que nous voulons encore considérer, est celui où l'axe instantané GI ou son prolongement, s'écarte constamment très peu du rayon $Gy_{,}$, et coïncide exactement avec celui-ci à l'origine du mouvement. Pour cela, il faudra que la constante c soit zéro, que la valeur initiale de p le soit aussi, et que le rapport de p à q demeure constamment une très petite fraction. En vertu de $c=0$ et de la seconde équation (1), la valeur de $\frac{dq}{dt}$ sera toujours très petite, ou autrement dit, on aura, à un instant quelconque,

$$q = -\gamma + \omega,$$

en désignant par $-\gamma$ la valeur initiale de q, et par ω une variable constamment très petite et nulle pour $t=0$.

On veut en outre qu'à l'origine du mouvement, l'axe instantané GI ou son prolongement, coïncide avec la direction de la vitesse a du point G; ce qui exige que le demi-axe $Gy_{,}$, situé alors au-dessus du plan horizontal des x et y, coïncide avec cette direction, et fasse, en conséquence, l'angle $90°-b$ avec l'axe Gz. Comme on a $\varphi=0$

pour $t = 0$, et, à un instant quelconque,

$$\cos y_{,}Gz = \mathcal{C}'' = \sin\theta\cos\varphi,$$

il s'ensuit que b sera la valeur initiale de θ; le demi-axe $Gz_{,}$ sera donc situé à l'origine du mouvement, au-dessus du plan des x et y, et le centre F de la sphère au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, selon que la fraction ε sera positive ou négative (n° 38). Le demi-axe $Gx_{,}$ coïncidant à cette époque avec la droite GL, dirigée vers le nœud ascendant L sur le plan des x et y, de la section du corps perpendiculaire à $Gz_{,}$, la rotation autour de $Gy_{,}$ aura lieu de $Gx_{,}$ vers $Gz_{,}$; la valeur initiale de q sera donc négative (n° 2), et la constante γ positive : la valeur de γ sera comme celle de c, qu'on a citée plus haut,

$$\gamma = \frac{2\pi a}{i}.$$

Enfin, quand le mouvement commence, GL ou $Gx_{,}$ étant perpendiculaire à Gx, l'angle ψ ou LGx, sera égal à 90° ou à 270°, comme dans le cas du n° 48, selon que la rotation initiale se fera de droite à gauche ou de gauche à droite.

Pour $t = 0$, nous aurons donc

$$\omega = 0, \quad p = 0, \quad \varphi = 0, \quad \theta = b, \quad \psi = 180^\circ \mp 90^\circ;$$

ce qui servira à déterminer les constantes arbitraires dans les intégrales des cinq équations (2) et (14) du mouvement de rotation.

(51). En négligeant tout-à-fait p et ω, dans les équations (2), et y faisant $c = 0$, elles deviendront

$$\gamma\sin\varphi = \frac{d\theta}{dt}, \quad \sin\theta\frac{d\psi}{dt} = \gamma\cos\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \cos\theta\frac{d\psi}{dt}. \quad (16)$$

Je les multiplie toutes trois membre à membre, puis je supprime les facteurs communs; il vient

$$\sin\varphi \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} = \cos\varphi \cos\theta \frac{d\theta}{dt},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} d\varphi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta;$$

équation dont l'intégrale est

$$\cos\varphi \sin\theta = \sin b,$$

en observant qu'on a à la fois $\varphi = 0$ et $\theta = b$.

En multipliant membre à membre les deux dernières équations (16) seulement, nous aurons

$$\sin\theta \frac{d\varphi}{dt} = \gamma \cos\varphi \cos\theta;$$

et comme l'équation précédente donne

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sin b}{\sqrt{\cos^2 b - \sin^2\varphi}},$$

il en résultera

$$\gamma dt = \frac{\sin b\, d\varphi}{\cos\varphi \sqrt{\cos^2 b - \sin^2\varphi}}.$$

En intégrant par les règles ordinaires, de manière qu'on ait $t = 0$ pour $\varphi = 0$, on trouve

$$\gamma t = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sqrt{\cos^2 b - \sin^2\varphi}}{\sin b \sin\varphi}\right).$$

On aura enfin

$$d\psi = \frac{d\varphi}{\cos\theta} = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos^2 b - \sin^2\varphi}},$$

et, par conséquent,

$$\psi = 180^\circ \mp 90^\circ \pm \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sin\varphi}{\cos b}\right).$$

Ces formules donnent les valeurs de t, θ, ψ, en fonctions de φ; on en déduit réciproquement,

$$\left.\begin{array}{ll} \sin\varphi = \frac{\cos b \sin \gamma t}{\Delta}, & \cos\varphi = \frac{\sin b}{\Delta}, \\ \sin\psi = \pm \frac{\sin b \cos \gamma t}{\Delta}, & \cos\psi = \mp \frac{\sin \gamma t}{\Delta}, \\ \sin\theta = \Delta, \quad \cos\theta = \cos b \cos \gamma t, & \end{array}\right\} \quad (17)$$

en faisant, pour abréger,

$$\sqrt{\sin^2 \gamma t + \sin^2 b \cos^2 \gamma t} = \Delta,$$

et considérant Δ comme une quantité positive. Dans les expressions de $\sin\psi$ et $\cos\psi$, comme dans la double valeur de ψ dont elles sont déduites, les signes supérieurs se rapportent au cas où la rotation initiale a lieu de droite à gauche, et les signes inférieurs au cas où elle se fait de gauche à droite.

Ces formules (17) feront connaître, en fonctions de t, les parties des valeurs de φ, ψ, θ, indépendantes de ε, et par conséquent à chaque instant, dans le cas de $\varepsilon = 0$, les directions des trois axes $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, ou la position du mobile autour du point G. On en conclut que les axes $Gx_{,}$ et $Gz_{,}$, fixes dans l'intérieur de ce corps, et la droite GL, font alors des oscillations isochrones, savoir : $Gx_{,}$ dans la section du mobile perpendiculaire à $Gz_{,}$, de part et d'autre de GL, et d'une amplitude égale à $90° - b$; cette droite GL, dans le plan horizontal, de part et d'autre de sa direction initiale sur ce plan, et dont l'amplitude est de $90°$; $Gz_{,}$ autour de la verticale Gz, non comprises dans un même plan, et ayant pour amplitude son écart initial b de cette droite. La durée de chaque oscillation entière est la même pour ces trois sortes de mouvements, et égale à $\frac{2\pi}{\gamma}$ ou à $\frac{l}{a}$; ce qui serait à peu près un soixantième de seconde dans l'exemple du n° 36.

Puisque les équations (16) ont été déduites des formules (2), en y supposant nulles les vitesses p et r, et la vitesse q constante, il s'en-

suit qu'elles appartiennent au mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe. Un tel mouvement peut donc se décomposer dans les trois mouvements simultanés d'oscillations qu'on vient de décrire; et réciproquement trois semblables mouvements se résolvent toujours en un simple mouvement de rotation, dont l'axe et la vitesse sont invariables; ce qu'on peut regarder comme un théorème relatif aux lois du mouvement d'un corps solide, indépendantes de sa forme et des forces qui le sollicitent. Les formules (2), sur lesquelles on s'est appuyé, ne supposent aucune forme particulière au mobile, et n'exigent pas non plus que les trois droites $Gx_{,}$, $Gy_{,}$, $Gz_{,}$, rectangulaires et fixes dans son intérieur, soient des axes principaux.

(52). Pour déterminer actuellement les déplacements de l'axe instantané GI, dans l'intérieur du mobile, qui sont produits par la résistance de l'air, il faut recourir aux équations (14), dans lesquelles on fera $c = 0$ et $q = -\gamma + \omega$, et l'on substituera les valeurs de α, 6, α'', $6''$, résultantes des formules (17), et de celles du n° 25; lesquelles valeurs seront simplement,

$$\alpha = \mp \sin b \sin \gamma t, \quad 6 = \pm \cos b,$$
$$\alpha'' = \cos b \sin \gamma t, \quad 6'' = \sin b;$$

au moyen de quoi les équations dont il s'agit deviendront

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \pm \frac{5\iota\mu a^2(\cos b \pm \zeta \sin b)}{2l(1+\mu a t)^2}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \pm \frac{5\iota\mu a(\sin b \mp \zeta \cos b)\sin \gamma t}{2l(1+\mu a t)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

La valeur de p qu'on en déduira s'exprimera sous forme finie en fonction de t; celle de ω ne pourra se calculer que par les quadratures ou par la réduction en série convergente; mais les quantités b et ζ étant supposées de très petites fractions, il s'ensuit que la quantité ω pourra être négligée par rapport à p, dans la détermination de l'axe GI sur le plan des demi-axes $Gx_{,}$ et $Gy_{,}$. On pourra aussi dans la première des deux formules précédentes, réduire à l'unité le facteur

$\cos b \pm \zeta \sin b$; en intégrant ensuite de manière qu'on ait $p = 0$ quand $t = 0$, et en ayant égard à la valeur de γ, on aura

$$\frac{p}{\gamma} = \pm \frac{5\epsilon i}{4\pi l}\left(1 - \frac{1}{1 + \mu a t}\right).$$

Notre analyse suppose que le rapport $\frac{p}{\gamma}$ soit une très petite fraction; le rapport $\frac{5i}{4\pi l}$, dans le tir de la carabine, est un nombre considérable, égal, par exemple, à environ 300 dans le cas du n° 36; pour que l'expression de $\frac{p}{\gamma}$ que nous obtenons, soit admissible pendant toute la durée du mouvement, il faudra donc que ϵ, ou le rapport de l'excentricité FG de la balle à son rayon, soit une fraction extrêmement petite. Lorsque le facteur $\frac{5\epsilon i}{4\pi l}$ sera effectivement une très petite fraction, cette valeur de $\frac{p}{\gamma}$ aura lieu pendant toute la durée du trajet de la balle, et en conséquence, l'axe de rotation GI s'approchera de plus en plus d'une position fixe, pour laquelle on aurait

$$\cos \mathrm{IG}x_{\prime} = \pm \frac{5\epsilon i}{4\pi l},$$

mais qu'il ne saurait atteindre pendant cette durée. Quand, au contraire, le facteur $\frac{5\epsilon i}{4\pi l}$ ne sera pas une petite fraction, la valeur de $\frac{p}{\gamma}$ ne pourra être employée qu'au commencement du mouvement, ou pour de petites valeurs de t. Au-delà de ces valeurs, l'expression de $\frac{p}{\gamma}$ ne nous sera pas connue : l'axe instantané pourra faire de grandes oscillations de part et d'autre de $Gy_{\prime}$, ou même des révolutions entières autour du point G, en restant toujours dans le plan de $Gx_{\prime}$ et $Gy_{\prime}$, à cause de $r = c = 0$ par hypothèse.

En adoptant les valeurs de q ou $-\gamma + \omega$, et de p, données par les équations (18), et les substituant dans les équations (2), on déduira ensuite de celles-ci, les parties des angles φ, ψ, θ, qui dépen-

dent de la première puissance de ϵ, au moyen de celles qui en sont indépendantes, et qu'on a déterminées dans le numéro précédent. De cette manière, on connaîtra l'influence de la non-homogénéité de la balle, sur les directions à chaque instant de ses axes principaux $Gx_{\prime}$, $Gy_{\prime}$, $Gz_{\prime}$. Mais ces parties de φ, ψ, θ, seraient exprimées en fonctions de t, par des intégrales compliquées, et que nous supprimons ici parce que leur réduction en nombres, par la méthode des quadratures, n'aurait aucune utilité dans la pratique.

(53). Il ne nous reste plus qu'à déterminer les parties des coordonnées x, y, z, du point G, qui dépendent de ϵ.

Puisqu'au degré d'approximation que notre analyse suppose, on doit négliger dans les seconds membres des équations (13), les termes qui auraient ϵ pour facteur, il s'ensuit qu'elles se réduiront à

$$\frac{du}{dt} + \frac{2\mu a u}{1 + \mu a t} = \frac{\mu a \gamma l \alpha}{1 + \mu a t},$$
$$\frac{dv}{dt} + \frac{\mu a v}{1 + \mu a t} = \frac{\mu a \gamma l \alpha'}{1 + \mu a t},$$
$$\frac{dw}{dt} + \frac{\mu a w}{1 + \mu a t} = \frac{\mu a \gamma l \alpha''}{1 + \mu a t},$$

en observant toutefois que les conséquences qui s'en déduiront, ne conviendront qu'aux valeurs de ϵ ou de t qui rendront le rapport $\frac{p}{\gamma}$, une très petite fraction.

D'après les formules (17), on aura d'ailleurs (n° 25),

$$\alpha = \mp \sin b \sin \gamma t, \quad \alpha' = \mp \cos \gamma t, \quad \alpha'' = \cos b \sin \gamma t.$$

En intégrant les équations précédentes, et observant que u, v, w, doivent être zéro pour $t = 0$, on trouve

$$u = \pm \frac{\mu a l b}{(1 + \mu a t)^2}\left[(1 + \mu a t)\cos \gamma t - \frac{\mu a}{\gamma}\sin \gamma t - 1\right],$$
$$v = \mp \frac{\mu a l \sin \gamma t}{1 + \mu a t},$$
$$w = \frac{\mu a l (1 - \cos \gamma t)}{1 + \mu a t},$$

où l'on a mis b et l'unité à la place de $\sin b$ et $\cos b$.

Je substitue ces valeurs dans celles de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, du n° 47. En intégrant ensuite et désignant par δx, δy, δz, les parties de coordonnées x, y, z, du centre de gravité G de la balle, qui dépendent de ε, c'est-à-dire les déviations horizontales et verticales de ce point, dues à la non-homogénéité du projectile, on aura

$$\delta x = \pm \frac{\mu a b l \varepsilon}{\gamma} \int \frac{[(1 + \mu a t)\gamma \cos \gamma t - \mu a \sin \gamma t - \gamma]}{(1 + \mu a t)^2} dt,$$
$$\delta y = \mp \mu a l \varepsilon \int \frac{\sin \gamma t}{1 + \mu a t} dt,$$
$$\delta z = \mu a l \varepsilon \int \frac{(1 - \cos \gamma t)}{1 + \mu a t} dt.$$

D'après la valeur de γ, on a

$$\frac{\mu a}{\gamma} = \frac{\mu t}{2\pi};$$

quantité très petite en général, et à peine égale à 0,005, dans l'exemple du n° 36. Il en résulte que par le procédé de l'intégration par partie, on pourra réduire ces expressions de δx, δy, δz, en séries très convergentes, ordonnées suivant les puissances de $\frac{\mu a}{\gamma}$. En s'arrêtant au premier terme de chacune de ces séries, nous aurons

$$\delta x = \pm \frac{\mu a l b \varepsilon}{\gamma (1 + \mu a t)^2} \left[(1 + \mu a t) \sin \gamma t + \frac{\mu a}{\gamma} (\cos \gamma t - 1) \right] \pm \frac{\mu a l b \varepsilon t}{1 + \mu a t},$$
$$\delta y = \mp \frac{\mu a l \varepsilon (1 - \cos \gamma t)}{\gamma (1 + \mu a t)},$$
$$\delta z = l \varepsilon \log (1 + \mu a t) - \frac{\mu a l \varepsilon \sin \gamma t}{\gamma (1 + \mu a t)}.$$

Cette valeur de la déviation δy, perpendiculaire au plan de projection de la balle, ne pourra être qu'une petite fraction de l'excentricité εl ou GF, toujours moindre que $\frac{2\mu a}{\gamma}$, ou qu'un centième dans l'exemple du n° 36. Le premier terme de δz pourra, au contraire, approcher beaucoup de εl, ou même surpasser cette petite fraction du

rayon. En prenant, comme dans l'exemple cité, environ 2,5 pour la valeur de $1+\mu at$ à la distance de 250 mètres du point de départ du projectile, ce terme deviendrait à peu près égal à ϵl; en sorte qu'à cette distance, et abstraction faite du second terme de la valeur de δz, le centre de gravité G, au lieu d'être retombé sur le plan horizontal mené par son point de départ, ainsi que cela aurait lieu si la balle était homogène, se trouverait à une hauteur FG au-dessus ou au-dessous de ce plan : au-dessus, si la fraction ϵ est négative; au-dessous, si elle est positive; c'est-à-dire au-dessus ou au-dessous, selon que le point F est en avant ou en arrière du point G. C'est là l'effet le plus sensible de la non-homogénéité de la balle, que nous puissions déterminer dans le tir de la carabine. A raison du facteur b, la déviation δx, à chaque instant, sera beaucoup moindre que la déviation δz correspondante.

ADDITION

Au § III *du Mémoire précédent.*

Pour calculer les intégrales U et V, comprises dans les formules (R) du n° 31 de ce Mémoire, on les a développées dans le n° 34, suivant les puissances d'une constante désignée par ρ; et pour que les séries que l'on a obtenues de cette manière soient convergentes, au moins dans leurs premiers termes, et puissent servir à ce calcul, il est nécessaire que ρ soit une petite fraction, ainsi que cela a lieu dans l'exemple du n° 36. Mais sans que la valeur de ρ soit très petite, il suffit que celle du produit de ρ et de la variable $\lambda_{\prime}$ le soit pendant toute la durée du mouvement, pour qu'on puisse développer d'une autre manière U et V en séries convergentes, qui se trouveront ordonnées suivant les puissances de $\rho\lambda_{\prime}$, et renfermeront en outre des fonctions de $\lambda_{\prime}$, $\sin\lambda_{\prime}$, $\cos\lambda_{\prime}$, dont les valeurs seront limitées et ne sauraient empêcher la convergence. C'est ce que nous allons faire voir dans cette *Addition.*

Pour plus de commodité, j'emploierai la lettre λ au lieu de $\lambda_{\prime}$. D'après les valeurs de cette quantité $\lambda_{\prime}$ et de ρ (n°^{s} 29 et 34), on aura

$$\lambda = \frac{\mu a t}{\rho(1+\mu a t)}, \quad 1 + \mu a t = \frac{1}{1-\rho\lambda}.$$

A cause de $\frac{\rho c f}{\mu z} = 1$, et des expressions de λ_1 et λ_2 (n° 34), on aura donc

$$\lambda_1 f = (b + g') \sin\lambda - g' \int_0^\lambda \frac{\cos\theta d\theta}{(1-\rho\theta)^2},$$
$$\lambda_2 f = (b + g')(1 - \cos\lambda) - g' \int_0^\lambda \frac{\sin\theta d\theta}{(1-\rho\theta)^2},$$

en mettant sous les signes $\int$, la valeur précédente de $1 + \mu at$, puis la lettre θ au lieu de λ. Par l'intégration par partie, on a d'ailleurs

$$\int_0^\lambda \frac{\cos\theta d\theta}{(1-\rho\theta)^2} = \frac{\cos\lambda}{\rho(1-\rho\lambda)} - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^\lambda \frac{\sin\theta d\theta}{1-\rho\theta},$$
$$\int_0^\lambda \frac{\sin\theta d\theta}{(1-\rho\theta)^2} = \frac{\sin\lambda}{\rho(1-\rho\lambda)} - \frac{1}{\rho}\int_0^\lambda \frac{\cos\theta d\theta}{1-\rho\theta};$$

par conséquent, les formules précédentes se changeront en celles-ci :

$$\lambda_1 f = (b+g')\sin\lambda - \frac{g'\cos\lambda}{\rho(1-\rho\lambda)} + \frac{g'}{\rho} - \frac{g'}{\rho}\int_0^\lambda \frac{\sin\theta d\theta}{1-\rho\theta},$$
$$\lambda_2 f = (b+g')(1-\cos\lambda) - \frac{g'\sin\lambda}{\rho(1-\rho\lambda)} + \frac{g'}{\rho}\int_0^\lambda \frac{\cos\theta d\theta}{1-\rho\theta};$$

d'où l'on tire

$$\lambda_1 f\cos\lambda - (b-\lambda_2 f)\sin\lambda = -\frac{g'}{\rho(1-\rho\lambda)} + \frac{g'}{\rho}\,\mathrm{P},$$
$$\lambda_1 f\sin\lambda + (b-\lambda_2 f)\cos\lambda = b + g' + \frac{g'}{\rho}\,\mathrm{Q},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\cos\lambda + \rho\sin\lambda - \int_0^\lambda \frac{\sin(\theta-\lambda)\,d\theta}{1-\rho\theta} = \mathrm{P},$$
$$\sin\lambda - \rho\cos\lambda - \int_0^\lambda \frac{\cos(\theta-\lambda)\,d\theta}{1-\rho\theta} = \mathrm{Q}.$$

Au moyen de ces formules, et à cause de

$$\log(1+\mu at) = -\log(1-\rho\lambda), \quad \frac{\mu a dt}{1+\mu at} = \frac{\rho d\lambda}{1-\rho\lambda},$$

les expressions de U et V du n° 31, multipliées par μa, deviendront

$$\mu a\mathrm{U} = \frac{g'}{\rho}\Big[\log(1-\rho\lambda)\int\frac{\rho d\lambda}{(1-\rho\lambda)^2} - \int\frac{\log(1-\rho\lambda)\rho d\lambda}{(1-\rho\lambda)^2}$$
$$- \log(1-\rho\lambda)\int\frac{\mathrm{P}\rho d\lambda}{1-\rho\lambda} + \int\frac{\mathrm{P}\log(1-\rho\lambda)\rho d\lambda}{1-\rho\lambda}\Big],$$

$$\mu a \mathrm{V} = (b + g')\left[\int \frac{\log(1-\rho\lambda)\,\rho d\lambda}{1-\rho\lambda} - \log(1-\rho\lambda)\int\frac{\rho d\lambda}{1-\rho\lambda}\right]$$
$$- \frac{g'}{\rho}\left[\log(1-\rho\lambda)\int\frac{\mathrm{Q}\rho d\lambda}{1-\rho\lambda} - \int\frac{\log(1-\rho\lambda)\,\mathrm{Q}\rho d\lambda}{1-\rho\lambda}\right];$$

les intégrales relatives à λ commençant à $\lambda = 0$.

Celles que P et Q contiennent ne peuvent pas s'obtenir sous forme finie; mais $\rho\lambda$ étant, par hypothèse, une petite fraction, et ces intégrales ayant $\theta = 0$ et $\theta = \lambda$ pour limites, on pourra développer sous les signes $\int$, en séries convergentes, coordonnées suivant les puissances de $\rho\theta$; et comme les quantités P et Q se trouvent multipliées, dans les formules précédentes, par $\log(1 - \rho\lambda)$ et $\rho d\lambda$, il suffira, si l'on borne l'approximation, par exemple, à la quatrième puissance de $\rho\lambda$ inclusivement, de s'arrêter, dans ses développements, au carré de $\rho\theta$. Alors, on aura

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \cos\lambda + \rho\sin\lambda - \int_0^\lambda (1 + \rho\theta + \rho^2\theta^2)\sin(\theta - \lambda)\,d\theta \\
&= 1 + \rho\lambda + \rho^2\lambda^2 - 2\rho^2\lambda^2 u, \\
\mathrm{Q} &= \sin\lambda - \rho\cos\lambda - \int_0^\lambda (1 + \rho\theta + \rho^2\theta^2)\cos(\theta - \lambda)\,d\theta \\
&= -\rho - 2\rho^2\lambda^2 v;
\end{aligned}$$

les lettres u et v désignant des fonctions de λ, savoir :

$$u = \frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos\lambda), \quad v = \frac{1}{\lambda^2}(\lambda - \sin\lambda),$$

dont les valeurs ne deviendront jamais très grandes. Avant de substituer ces valeurs de P et Q dans les formules précédentes, où elles seront multipliées par $\log(1 - \rho\lambda)$ et $\rho d\lambda$, on y pourra remplacer $1 + \rho\lambda + \rho^2\lambda^2$ par $\frac{1}{1-\rho\lambda}$. De cette manière, on aura d'abord

$$\mu a \mathrm{U} = \frac{2g'}{\rho}\left[\log(1-\rho\lambda)\int\frac{u\rho^3\lambda^2 d\lambda}{1-\rho\lambda} - \int\frac{u\log(1-\rho\lambda)\,\rho^3\lambda^2 d\lambda}{1-\rho\lambda}\right],$$
$$\mu a \mathrm{V} = \frac{1}{2} b \log^2(1-\rho\lambda) + \frac{2g'}{\rho}\left[\log(1-\rho\lambda)\int\frac{v\rho^3\lambda^2 d\lambda}{1-\rho\lambda} - \int\frac{v\log(1-\rho\lambda)\,\rho^3\lambda^2 d\lambda}{1-\rho\lambda}\right].$$

En négligeant toujours la quatrième puissance de $\rho\lambda$, on pourra mettre dans les quantités comprises entre les crochets, l'unité et $-\rho\lambda$ à la place de $1-\rho\lambda$ et $\log(1-\rho\lambda)$; et en ayant égard aux valeurs de u et v, il en résultera

$$aU = -\frac{2g'\rho^3}{\mu}\left(\frac{1}{2}\lambda^2 - 1 + \cos\lambda\right),$$
$$aV = \frac{b}{2\mu}\log^2(1+\mu at) - \frac{2g'\rho^3}{\mu}\left(\lambda - \sin\lambda - \frac{\lambda^3}{6}\right).$$

Je substitue maintenant ces valeurs dans les deux dernières équations (R) du n° 31; en supprimant les termes de leurs seconds membres, qui dépendent de U' et V', il vient

$$\left.\begin{aligned} y &= \mp\frac{4\epsilon g'\rho^3}{3\mu}\left(\frac{1}{2}\lambda^2 - 1 + \cos\lambda\right), \\ z &= \frac{b}{\mu}\left[1 + \frac{1}{3}\epsilon\log(1+\mu at)\right]\log(1+\mu at) \\ &\quad + \frac{g'}{\mu}\left[\log(1+\mu at) - \frac{1}{2}(1+\mu at)^2 + \frac{1}{2}\right] \\ &\quad + \frac{4\epsilon g'\rho^3}{3\mu}\left(\lambda - \sin\lambda - \frac{\lambda^3}{6}\right). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Cette valeur de y exprimera à chaque instant la déviation horizontale de la balle, due à sa non-sphéricité, et à sa rotation provenant des hélices tracées dans l'intérieur de l'arme; elle est, comme on voit, indépendante de l'angle du tir. Suivant qu'elle sera positive ou négative, elle aura lieu à gauche ou à droite du plan de projection, et l'on y devra prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que la partie supérieure de la balle tournera de la gauche à la droite ou de la droite à la gauche du soldat. Il est facile de voir que la quantité comprise entre les parenthèses sera toujours positive; et comme la fraction ϵ est positive pour la balle allongée, négative pour la balle aplatie, il s'ensuit que, dans la supposition qu'on a faite d'une très petite valeur de $\rho\lambda$, la balle allongée déviera à droite et la balle aplatie à gauche, quand la rotation se fera de gauche à droite, *et vice versâ,* lorsqu'elle aura lieu de droite à gauche.

Le temps t', au bout duquel la balle sera parvenue à une distance donnée ϖ, de son point de départ, sera toujours déterminé par l'équation (S) du n° 32, savoir :

$$1 + \mu a t' = e^{\mu\varpi}\left[1 + 2\varepsilon\left(1 - \mu\varpi - e^{-\mu\varpi}\right)\right];$$

et ne dépendra pas, par conséquent, de l'angle du tir. Si l'on veut que ϖ soit la *portée* horizontale, c'est-à-dire la distance à laquelle la balle retombera sur le plan horizontal de son point de départ, et si l'on désigne alors par $\mathsf{6}$ l'angle du tir qui devra avoir lieu, de sorte qu'on ait $z = 0$ pour $t = t'$ et $b = \mathsf{6}$, il en résultera

$$\left.\begin{array}{l} \mathsf{6}\left[1 + \frac{1}{3}\varepsilon \log(1 + \mu a t')\right] \log(1 + \mu a t') \\ = g'\left[\frac{1}{2}(1 + \mu a t')^2 - \frac{1}{2} - \log(1 + \mu a t')\right] + \frac{4 i g' c^2}{3}(2 - 2\cos\lambda' - \lambda' \sin\lambda'); \end{array}\right\} \quad (2)$$

équation qui servira à déterminer $\mathsf{6}$ au moyen de la valeur de t', déduite de l'équation précédente, et où l'on désigne par λ' la valeur correspondante de λ.

Lorsque l'on tirera sous un angle b, différent de $\mathsf{6}$, et tel que l'on ait $b = \mathsf{6} + b'$, si l'on représente par y' et z' les valeurs de y et z, on aura, d'après les formules (1) et l'équation précédente,

$$\left.\begin{array}{l} y' = \mp \frac{4 i g' c^2}{3\mu}\left(\frac{1}{2}\lambda' - 1 + \cos\lambda'\right), \\ z' = \frac{b'}{\mu}\left[1 + \frac{1}{3}\varepsilon \log(1 + \mu a t')\right] \log(1 + \mu a t'). \end{array}\right\} \quad (3)$$

Les coordonnées horizontale et verticale y' et z', seront celles du point où le centre de la balle viendra frapper le plan de la cible, placé à la distance ϖ, vertical et perpendiculaire au plan de projection. Elles auront pour origine le centre de la cible, c'est-à-dire le point de son plan vers lequel le soldat vise à chaque coup. Toutefois, on ne doit pas perdre de vue qu'à cause de l'omission des termes qui

dépendraient des intégrales U′ et V′, les formules précédentes répondent à la position moyenne du centre de la balle sur la cible, dans un très grand nombre de coups, et qu'elles peuvent même se trouver en défaut quand il existe, dans la construction de l'arme, quelque cause constante qui influe sur les déviations du projectile. En effet, les valeurs de ces intégrales résultent à chaque coup, ainsi qu'on l'a expliqué dans le Mémoire, de circonstances accidentelles dont les effets se compensent et disparaissent généralement dans les résultats moyens d'une longue séries d'épreuves, aussi semblables qu'il est possible. Ainsi, en tirant un très grand nombre de coups sous l'angle 6 déterminé par l'équation (2), on trouvera que la moyenne des coordonnées verticales z, positives ou négatives, approchera de plus en plus d'être égale à zéro, et finira par n'en plus différer sensiblement. En tirant sous un autre angle $6 + b'$, on trouvera de même que l'ordonnée moyenne, conclue d'un grand nombre d'épreuves, différera très peu de la valeur de z', donnée par la seconde formule (3); et, quel que soit l'angle du tir, on vérifiera en même temps que la moyenne des abscisses horizontales y, mesurées dans un très grand nombre de coups et en ayant égard à leurs signes, approchera aussi de plus en plus, de la valeur positive ou négative de y', calculée au moyen de la première formule (2). Mais il n'en sera plus de même dans le cas de quelque cause constante, lorsque, par exemple, l'axe des hélices, tracées dans l'intérieur de l'arme, ne coïncidera pas exactement avec l'axe du canon : alors les moyennes des abscisses horizontales et des ordonnées verticales tendront bien toujours vers des valeurs constantes, dont elles ne différeront plus sensiblement après une longue série d'épreuves ; mais la moyenne des abscisses ne sera plus égale à y', et celles des ordonnées ne sera plus zéro ou égale à z' : il pourra même arriver que les moyennes observées aient des signes contraires à ceux de y' et z'.

Quand il n'existera, indépendamment de la non-sphéricité et de la rotation du projectile, aucune autre cause constante qui tende à élever ou à abaisser les coups au-dessus ou au-dessous du plan horizontal

mené par le point de départ de la balle, l'angle du tir, déterminé par l'équation (1), lorsque le produit $\rho\lambda$ sera une petite fraction pendant toute la durée du mouvement, comme on le suppose dans cette *Addition*, ou bien par l'équation (T) du n° 34, lorsque ce sera la quantité ρ qui aura une très petite valeur, ainsi qu'on le supposait dans ce numéro; cet angle, disons-nous, sera le plus avantageux, c'est-à-dire l'angle sous lequel il faudra tirer pour atteindre la cible placée à la distance donnée ϖ, le plus grand nombre de fois dans une longue série d'épreuves. C'est, en effet, ce qui s'est vérifié dans l'exemple du n° 36. Par un très grand nombre d'essais faits avec des balles allongées, on avait trouvé que la chance de toucher une cible à la distance de 250 mètres, et avec une vitesse initiale de 384 mètres par seconde, était la plus grande en tirant sous l'angle de 62′ 30″; et, d'après ces mêmes données, cet angle, calculé au moyen de l'équation (T), a été trouvé de 60′ 25″; la petite différence, d'à peu près 2′ entre le calcul et l'expérience, peut être attribuée en partie aux erreurs des observations, et en partie au degré d'approximation où l'on s'est arrêté dans cette équation.

FIN.



ERRATA.

Page 12, ligne 8, *au lieu de* $\cos\lambda$, *lisez* $\cos\nu$, et *au lieu de* $\cos\nu$, *lisez* $\cos\lambda$

13, ligne 3, *au lieu de* Si l'on suppose, *lisez* Puisque l'on suppose

108, ligne 8 en remontant, *au lieu de* (10), *lisez* (13)

112, ligne 1re, *au lieu de* ψ, *lisez* φ

Ibid., ligne 5, en remontant, *au lieu de* vers la droite, *lisez* vers la droite GL

129, ligne 9, *au lieu de* $m\frac{d^2z}{dt^2}$, *lisez* $m\frac{d^2z}{dt^2} + mg$, *et divisez* par dt les premiers membres des trois dernières équations (A)

132, ligne 2 en remontant, *au lieu de* ι, *lisez* ιl

136, ligne 6 en remontant, *au lieu de* $h^2 + h_1^2 + h_2^2 = 1$, $h'^2 + h_1'^2 + h_2'^2 = 1$, $h''^2 + h_1''^2 + h_2''^2 = 1$, *lisez* $h^2 + h'^2 + h''^2 = 1$, $h_1^2 + h_1'^2 + h_1''^2 = 1$, $h_2^2 + h_2'^2 + h_2''^2 = 1$

169, ligne 14, *mettez* $= 0$ à la fin de l'équation

179, ligne 14, *au lieu de* (36), *lisez* (37)





